

Работа 2.2.

Изучение вынужденных колебаний в колебательном контуре

Цель работы: изучение зависимости тока в колебательном контуре от частоты источника ЭДС, включенного в контур, и измерение резонансной частоты контура.

Приборы и оборудование: звуковой генератор Гб–46, электронный осциллограф, модуль ФПЭ–11, магазин сопротивлений, магазин емкостей.

Введение

Рассмотрим процессы, протекающие в последовательном RLC контуре, подключенном к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. Запишем второе правило Кирхгофа для контура в виде

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} + IR = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Используя соотношение $I = \dot{q}$, запишем уравнение (1) в виде уравнения колебаний относительно заряда:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Переходя от заряда на конденсаторе к напряжению $U = q/C$ и вводя обозначения

$$\gamma = R/(2L), \quad \omega_0^2 = 1/(LC), \quad (2)$$

перепишем это уравнение в виде

$$\ddot{U} + 2\gamma\dot{U} + \omega_0^2 U = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (3)$$

Часто при исследовании колебательных процессов удобно использовать комплексное представление. Для решения полученного уравнения перейдем к комплексному представлению колебаний, положив

$$U(t) \rightarrow \hat{U}(t) = \Re \hat{U}(t) + i \Im \hat{U}(t), \quad U(t) = \Re \hat{U}(t); \quad (4)$$

$$\mathcal{E}(t) \rightarrow \hat{\mathcal{E}}(t) = \hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathcal{E}(t) = \Re \hat{\mathcal{E}}(t).$$

В данном случае величина $\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\phi}$ не зависит от времени, но несет информацию об амплитуде и о начальной фазе колебания ϕ . Введенные таким образом величины называют *комплексными амплитудами*. В данном случае начальная фаза $\phi = 0$, следовательно $\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$.

Тогда вместо (3) будем иметь дело с уравнением

$$\ddot{\hat{U}} + 2\gamma\dot{\hat{U}} + \omega_0^2 \hat{U} = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Решение последнего уравнения можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых описывает свободные колебания, а второе — вынужденные. Если коэффициент затухания γ ненулевой, то свободные колебания со временем затухнут и останутся только вынужденные. Далее будем искать решение, соответствующее вынужденным колебаниям, представив его через комплексную амплитуду напряжения \hat{U}_0 :

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0 e^{i\Omega t}. \quad (6)$$

Подстановка данного выражения в (5) дает

$$(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega) \hat{U}_0 e^{i\Omega t} = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Поскольку такое равенство должно выполняться в любой момент времени, отсюда следует $\omega = \Omega$ и

$$\hat{U}_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \mathcal{E}_0 \quad (7)$$

Полученная зависимость называется частотной характеристикой контура.

Положим $\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega = \rho e^{-i\phi_0}$. Отсюда находим

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

С учетом этого решение, описывающее вынужденные колебания напряжения, принимает вид

$$U = U_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad U_0 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \mathcal{E}_0. \quad (8)$$

С учетом связи добротности и коэффициента затухания

$$Q = \pi/\gamma T = \omega_0/2\gamma \quad (9)$$

формулу (8) можно представить виде

$$\frac{U_0}{\mathcal{E}_0} = \frac{Q}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}.$$

При $\omega = \omega_0$ амплитуда вынужденных колебаний равна $U_0 = Q\mathcal{E}_0$. На рис. 1 показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний напряжения от частоты внешней ЭДС, называемая амплитудно-частотной характеристикой, при значениях добротности $Q = 0.5, 1, 3, 5, 10$. Из рисунка видно, что при не слишком большом затухании наблюдается сильное возрастание амплитуды при приближении частоты внешней ЭДС к некоторой характерной частоте. Это явление называется **резонансом**, кривые, изображенные на графике – резонансными кривыми, а частота, при которой амплитуда достигает максимума – резонансной частотой.

Аналогичная зависимость для тока также имеет резонансный вид, но несколько отличается от зависимости, изображенной на рис. 1. Для нахождения этой зависимости представим (1) в виде

$$LI + \frac{\int Idt}{C} + IR = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (10)$$

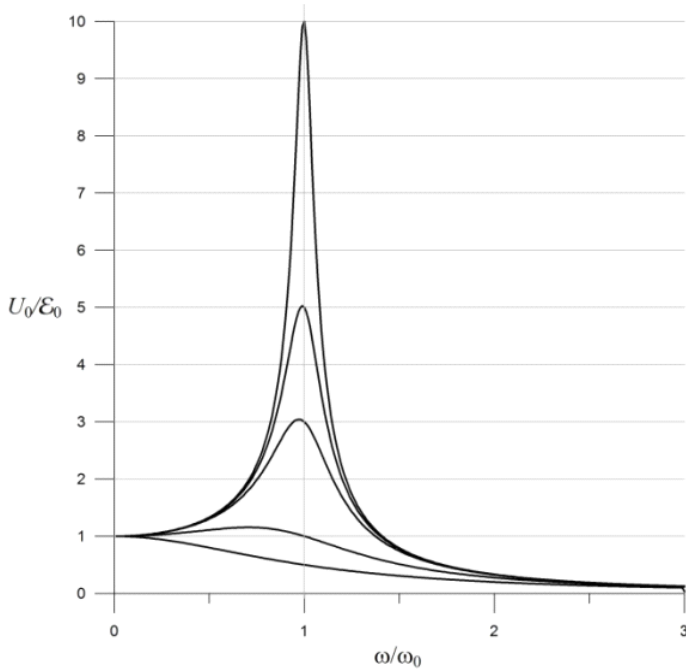


Рис. 1: Амплитудно-частотные характеристики (резонансные кривые) для напряжения

Введем комплексное представление для тока аналогично (4) и (6). Тогда (10) примет вид

$$\hat{U}_L + \hat{U}_C + \hat{U}_R = \hat{I}_0 \hat{Z} = \varepsilon_0,$$

где \hat{U}_L , \hat{U}_C , \hat{U}_R — комплексные амплитуды напряжений на индуктивности, емкости и сопротивлении соответственно, \hat{I}_0 — комплексная амплитуда тока, величина

$$\hat{Z} = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R$$

называется **импедансом**, $\hat{U}_C \equiv \hat{U}_0$. Комплексные амплитуды тока и напряжения на емкости связаны соотношением:

$$\hat{I}_0 = \hat{U}_C i\omega C. \quad (11)$$

Следовательно, с учетом (7) и (11), комплексная амплитуда тока в контуре зависит от частоты следующим образом:

$$\hat{I}_0 = \frac{i\omega_0^2\omega C}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \mathcal{E}_0. \quad (12)$$

Переходя к действительным величинам, получим зависимость

$$I_0 = \frac{\omega_0^2\omega C \mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad (13)$$

откуда видно, что максимальное значение тока $I_{0\text{рез}} = \frac{\omega_0^2 C \mathcal{E}_0}{2\gamma}$ достигается при $\omega = \omega_0$, и

$$I_0 = \frac{2\gamma\omega I_{0\text{рез}}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (14)$$

Также формулу (14) можно представить в виде

$$\frac{I_0}{I_*} = \frac{Q\omega/\omega_0}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}},$$

где обозначено $I_* = \omega_0 C \mathcal{E}_0 = I_{0\text{рез}}/Q$.

С учетом (7) и (11), сдвиг по фазе между током и \mathcal{E}_0 равен

$$\phi = \text{arctg} \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{\pi}{2},$$

что в случае резонанса $\omega \rightarrow \omega_0$ дает $\phi = 0$.

На рис. 2 показаны резонансные кривые для тока при значениях добротности $Q=0.5, 1, 3, 5, 10$. Следует обратить внимание, что для тока резонанс наступает при $\omega = \omega_0$, а для напряжения на конденсаторе резонансная частота при уменьшении добротности смещается в область низких частот.

Добротность контура связана с остротой резонансных кривых. Найдем ширину резонансной кривой (14) на высоте $I_0 = I_{0\text{рез}}/\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (15)$$

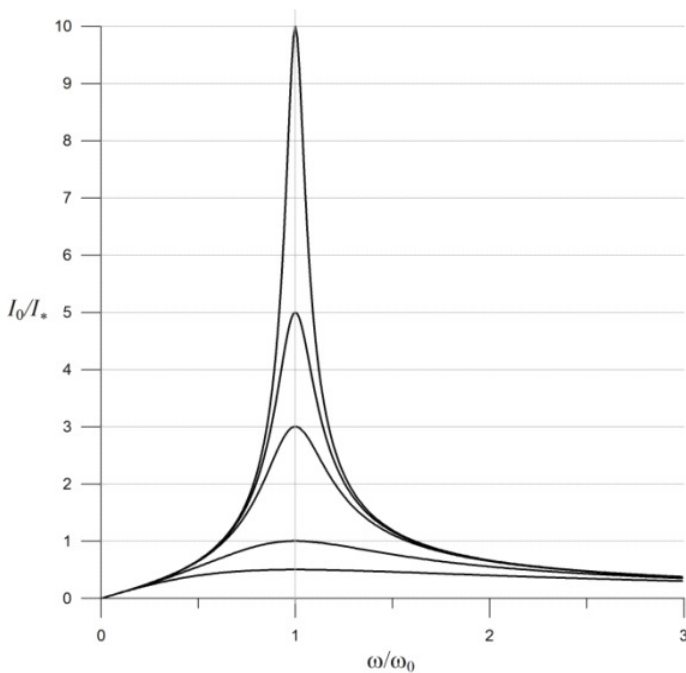


Рис. 2: Резонансные кривые для тока

Возводя выражение (15) в квадрат и упрощая, получим

$$(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) = 2\gamma\omega. \quad (16)$$

Вблизи резонанса $\omega_0 \approx \omega$, из чего получаем $\omega_0 - \omega = \Delta\omega/2 = \gamma$.
Учитывая (9), имеем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q},$$

то есть при малом затухании $\gamma \ll \omega_0$ *относительная ширина резонансной кривой обратно пропорциональна добротности контура.*

Методика измерений

Принципиальная электрическая схема лабораторной установки приведена на рис. 3. Колебательный контур состоит из катушки

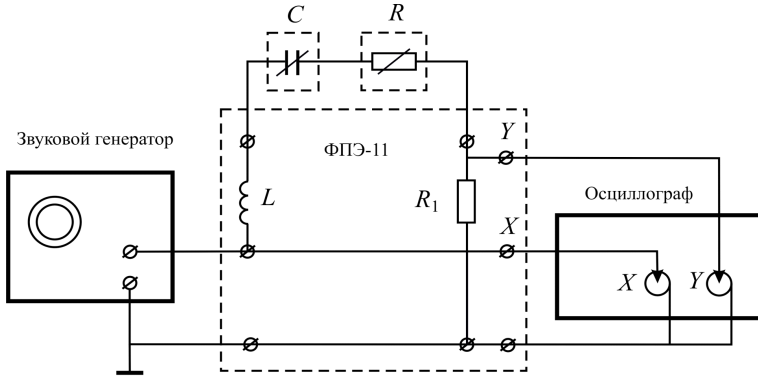


Рис. 3: Схема установки

индуктивности L , магазина емкостей C , переменного сопротивления R и сопротивления R_1 . Индуктивность L и сопротивление R_1 смонтированы в блоке ФПЭ-11. Напряжение на сопротивлении R_1 , пропорциональное току в контуре, подается на вход Y электронного осциллографа. Для снятия резонансных кривых, изменяя частоту звукового генератора, определяют зависимость $I_0 = f(\omega)$ при различных сопротивлениях контура R .

При измерениях сдвига фаз ϕ между током в контуре и напряжением на генераторе можно использовать фигуры Лиссажу, получаемые на экране осциллографа. Пусть имеются два синусоидальных напряжения одинаковой частоты ω . Подадим эти напряжения на горизонтальные и вертикальные пластины осциллографа. Смещение луча под действием этих напряжений пропорционально напряжению и по горизонтали $x = x_0 \sin \omega t$ и по вертикали $y = y_0 \sin(\omega t + \phi)$, где ϕ - сдвиг фаз между напряжениями; x_0 и y_0 - амплитуды смещения луча, пропорциональные амплитудам напряжения и коэффициентам усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, получим

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0y_0} \cos \phi = \sin^2 \phi. \quad (17)$$

Выражение (17) — уравнение эллипса, описываемого электронным лучом на экране осциллографа. Выберем коэффициенты усиления

вертикального и горизонтального каналов осциллографа такими, чтобы $x_0 = y_0$. В этом случае

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \phi = x_0^2 \sin^2 \phi. \quad (18)$$

Уравнение (18) — уравнение эллипса, оси которого составляют угол $\frac{\pi}{4}$ с осями координат. При $\phi = 0$ эллипс вырождается в прямую $y = x$, при $\phi = \frac{\pi}{2}$ — в круг радиуса x_0 . Для точки M эллипса $y = x$ (рис. 4), следовательно $a^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$, а уравнение (18) для этой точки примет вид:

$$2x^2 (1 - \cos \phi) = x_0^2 \sin^2 \phi;$$

$$a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = x_0^2 \cdot 4 \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2}.$$

Отсюда

$$a^2 = 2x_0^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}. \quad (19)$$

Аналогично для точки N эллипса, где $y = -x$, получим

$$b^2 = 2x_0^2 \sin^2 \frac{\phi}{2}. \quad (20)$$

Из выражений (19) и (20) получим

$$\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{b}{a}.$$

Таким образом, для измерения сдвига фаз между напряжениями одинаковой частоты достаточно измерить полуоси a и b эллипса, вписанного в квадрат на экране осциллографа. При $\phi = 0$ эллипс вырождается в прямую, что позволяет по фигурам Лиссажу установить момент наступления резонанса. Для получения фигур Лиссажу на вход Y осциллографа (см. рис. 3) подается напряжение с сопротивления R_1 , пропорциональное току, а на вход X — напряжение со звукового генератора.

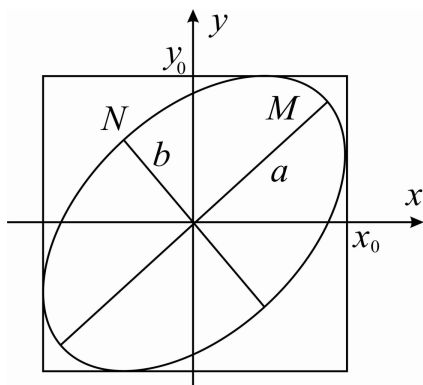


Рис. 4:

Задание

I. Снятие резонансных кривых

1. Установить переключателями магазина емкостей $C = 3$ нФ и переключателями магазина сопротивления $R = 1$ Ом.
2. Используя приблизительное значение индуктивности $L = 100$ мГн, рассчитать резонансную частоту контура по формуле $f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.
3. Подготовить приборы к работе:
 - а) включить звуковой генератор сигналов Г6-46 и установить следующие параметры выходного напряжения: частота — 2 кГц; ручка АМПЛ в среднее положение; ослабление сигнала — нажато 0 дВ;
 - б) настроить электронный осциллограф согласно техническому описанию;
 - в) включить развертку осциллографа с запуском от усилителя y и установить частоту развертки, удобную для наблюдения сигналов частотой 2–16 кГц;
 - г) установить переключатель усиления сигнала по оси y в положение 1 В/дел, повернуть ручку масштаба по оси y по часовой стрелке до щелчка;

д) установить "0" на оси канала y : переключатель AC-GND-DC осциллографа перевести в положение GND; выставить "0"; перевести переключатель в положение DC.

4. Включить лабораторный стенд и приборы. Получить на экране осциллографа устойчивое изображение синусоиды. Изменяя значение частоты в диапазоне 2–16 кГц, переключателем подобрать усиление по оси y таким образом, чтобы при нахождении в резонансе размах амплитуды сигнала был максимален.
5. Измерить амплитуды сигнала при частотах в диапазоне от 2 до 16 кГц. Частоту изменять с интервалом 1–2 кГц, вблизи резонанса с интервалом 0,2 кГц. Результат измерений занести в таблицу 1.
6. Рассчитать амплитуду тока в колебательном контуре по формуле $I_0 = U_0/R_1$, где R_1 – значение, указанное на модуле (75 Ом). Расчет провести для каждого значения частоты, результаты вычислений записать в таблицу в миллиамперах.

Таблица 1

f , кГц							
U_0 , В							
I_0 , мА							

7. Снять резонансную кривую (п. 4–6) при $R = 500$ Ом и $R = 3000$ Ом.
8. Построить на одном чертеже графики зависимостей I_0 от f .
9. По графикам при $R = 1$ Ом и $R = 500$ Ом найти ширину резонансной кривой Δf и рассчитать значения добротности контура по формуле $Q = f_p/\Delta f$.

II. Определение зависимости резонансной частоты от емкости

1. Установить сопротивление $R = 1$ Ом, емкость $C = 1$ нФ.

2. Перевести переключатель время/дел в положение $X-Y$. На экране осциллографа наблюдать эллипс. Изменяя частоту звукового генератора, добиться превращения эллипса в прямую, расположенную примерно под углом 45° к оси x . При необходимости изменять усиление усилителя. При этом частота звукового генератора равна резонансной частоте f_p .
3. Провести измерения f_p при значениях C от 1 до 10 нФ с интервалом 1 нФ.
4. Значения f_p и C записать в таблицу 2.

Таблица 2

C , нФ							
f_p , кГц							
F							

5. Вычислить значения $F = 1 / (2\pi f_p)^2$ и построить график зависимости F от C , который должен представлять собой прямую линию, проходящую через начало координат.
6. Рассчитать значение индуктивности катушки как тангенс угла наклона на графике $F(C)$. Определить погрешность нахождения L , учитывая, что точность значений емкостей, устанавливаемых на магазине емкостей, составляет 5%.

Контрольные вопросы

1. Что такое резонанс?
2. Что такое добротность колебательного контура?
3. Покажите, что резонанс токов наступает при частоте внешней ЭДС, совпадающей с ω_0 .
4. Как связана добротность и ширина резонансной кривой?
5. Как связана добротность с параметрами контура – индуктивностью, емкостью и сопротивлением?