

# Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



# СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №10

## Элементы теории упругости и гидродинамики.

1. Деформации. Закон Гука.
2. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона. Модули всестороннего сжатия и одностороннего сжатия.
3. Энергия упругой деформации.
4. Гидростатика.
5. Стационарное и нестационарное течение жидкости и газа. Уравнение Бернулли. Формула Торричелли.
6. Вязкость. Течение Пуазейля. Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса.
7. Подъёмная сила крыла. Эффект Магнуса.

# 1. Деформации. Закон Гука.

Деформация – изменение формы и объёма тела под действием приложенных сил.

Упругие деформации исчезают после прекращения действия приложенных сил.

Пластические (остаточные) деформации сохраняются в теле после прекращения действия внешних приложенных сил.

Виды деформаций: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб.

Для идеально упругих тел существует однозначная зависимость между действующими силами и вызываемыми ими деформациями.

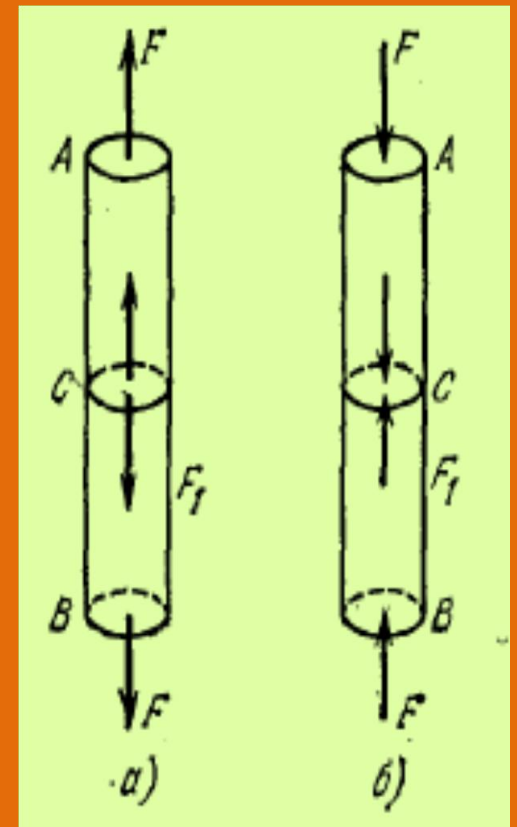


Малые деформации подчиняются закону Гука: деформации пропорциональны силам их вызывающим.

Сила  $F$ , отнесенная к единице площади называется напряжением. Если стержень растягивается, то это напряжение называется *растяжением* и определяется выражением

$$T = \frac{F}{S}$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения стержня.



Если стержень сжат, то это напряжение называется *давлением* и определяется такой же формулой. Давление можно рассматривать как отрицательное натяжение.

Пусть  $l_0$  - длина недеформированного стержня. После приложения силы  $F$  его длина получает приращение  $\Delta l$  и делается равной  $l = l_0 + \Delta l$ . Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

называется *относительным удлинением* стержня.

## 2. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона. Модули всестороннего и одностороннего сжатия.

Для малых упругих деформаций натяжение  $T$  (или давление  $P$ ) пропорционально относительному удлинению (или относительному сжатию)

$$T = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad \left( P = -E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \right)$$

где  $E$  - модуль Юнга (величина зависящая от материала стержня и его физического состояния).

Под действием растягивающей силы изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня (толщина).

Пусть  $a_0$  - толщина стержня до деформации,  $a$  - после деформации,  $\Delta a = a - a_0$ .

Коэффициент Пуассона

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta a}{a_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}}$$

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона – изотермические (квазистатические деформации).

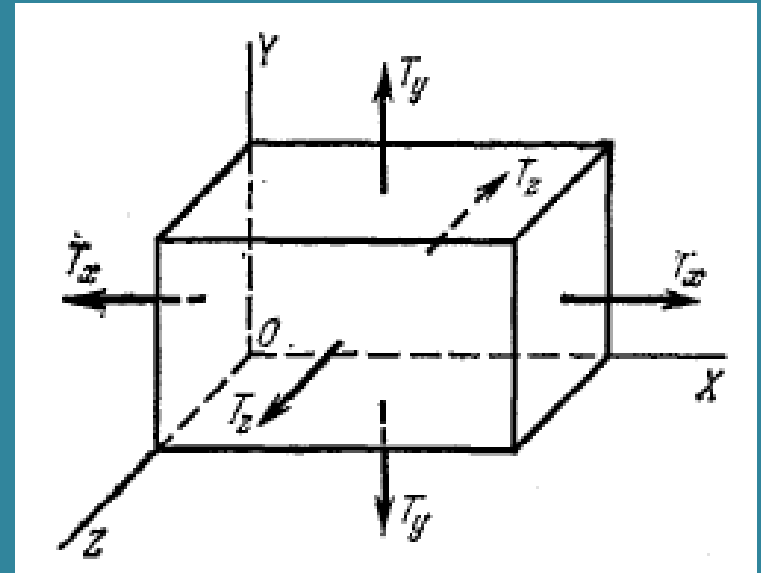


Деформации прямоугольного параллелепипеда под действием трех взаимно перпендикулярных сил

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (T_y + T_z),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (T_z + T_x),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E} \cdot (T_x + T_y).$$



Всестороннее сжатие (все натяжения равны и отрицательны)

$$T_x = T_y = T_z = -P, \quad P > 0$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E} \cdot (1 - 2\mu),$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{K},$$

где  $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$  - модуль всестороннего сжатия.

Деформация одностороннего сжатия (или растяжения) – стержень может свободно растягиваться (или сжиматься) вдоль одной оси, а его поперечные размеры изменяться не могут (например,  $\Delta y = \Delta z = 0$ ,  $\Delta x \neq 0$ )

$$T_y = T_z = \frac{\mu}{1 - \mu} T_x,$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E} \cdot \left( 1 - \frac{2\mu^2}{1 - \mu} \right) = \frac{T_x}{E'}, \quad E' = E \frac{1 - \mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}$$

где  $E'$  - модуль одностороннего растяжения.



Задача 1. Оценить, при каком давлении внутри лопнет воздушный шарик. Модуль Юнга мягкой резины, из которой он изготовлен, принять равным  $E = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2$ .

Задача 2. Оценить максимальное давление, которое может произвести вода при замерзании. Плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 917 \text{ кг / м}^3$ , модуль Юнга  $E = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

### 3. Энергия упругой деформации.

Упругую энергию растянутого стержня можно рассчитать, рассматривая квазистатический процесс:

$$f(x) = kx, \quad f(0) = 0, \quad f(\Delta l) = F$$

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x) dx = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$$

Объёмная плотность упругой энергии

$$u = \frac{U}{V} = \frac{U}{Sl} = \frac{1}{2} T \varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{T^2}{2E}$$

Плотность упругой энергии при всестороннем сжатии

$$u = \frac{3(1-2\mu)}{2E} P^2 = \frac{P^2}{2K}$$

$$\mu < \frac{1}{2}$$



Oryzowizacja w Mińskaszkach







## 4. Гидростатика.

Жидкости и газы в состоянии равновесия обладают только объёмной упругостью.

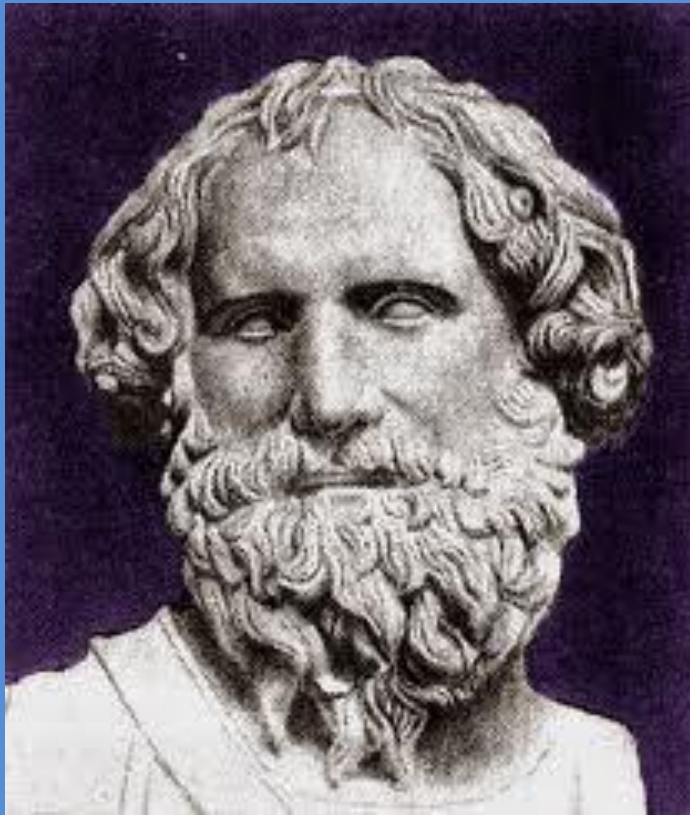
В состоянии равновесия напряжение в жидкости и газе всегда перпендикулярно к площадке, на которую оно действует.

В состоянии равновесия нормальное напряжение (давление) не зависит от пространственной ориентации площадки, на которую оно действует (закон Паскаля).

Давление в однородной несжимаемой жидкости, находящейся в однородном поле тяжести

$$P = P_0 - \rho g z$$

**Закон Архимеда:** если тело погруженное в жидкость, удерживается в механическом равновесии, то со стороны окружающей жидкости оно подвергается выталкивающей силе гидростатического давления, численно равной весу жидкости в объёме, вытесненном телом. Эта сила направлена вверх и проходит через центр масс **жидкости**, вытесненной телом.



## 5. Стационарное и нестационарное течение жидкости и газа. Уравнение Бернулли. Формула Торричелли.

Гидродинамика занимается изучением равновесия и движения жидкостей.

Если жидкость находится в движении, то наряду с нормальными напряжениями в ней могут возникать и касательные силы (или сдвиговые силы внутреннего трения).

**Жидкости**, в которых не возникают силы внутреннего трения, называются **идеальными**.

## Кинематическое описание движения жидкости

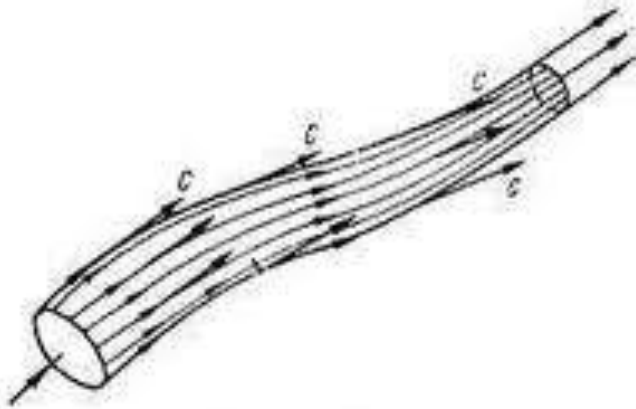
- ❖ Поле скоростей – мгновенная картина распределения скоростей частиц жидкости.
- ❖ Линия, касательная к которой указывает направление скорости частицы, проходящей в рассматриваемый момент через точку касания называется линией тока.
- ❖ Если поле скоростей (линии тока) не изменяется со временем, то такое течение называется стационарным.
- ❖ При стационарном течении линии тока совпадают с траекториями частиц.
- ❖ Трубка тока.

В случае стационарного течения для двух сечений в трубке тока

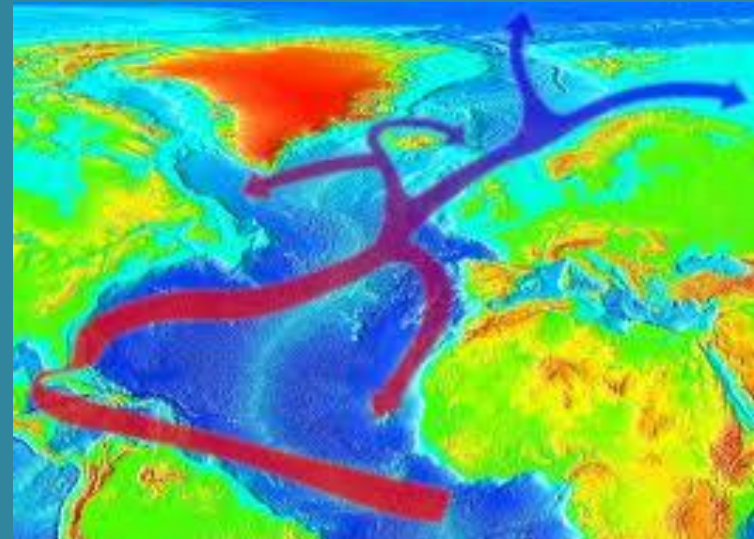
$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

Для несжимаемой жидкости  $(\rho_1 = \rho_2)$

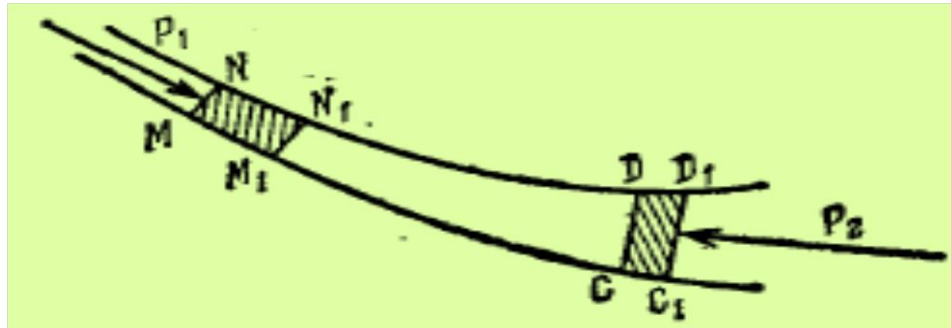
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$$



Трубка тока. Она образована линиями тока. В каждой точке линии тока частичка жидкости имеет скорость, направленную по касательной к линии тока.



Вдоль одной и той же линии тока при стационарном течении идеальной жидкости



остаётся постоянной величина

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = \text{const} \quad - \quad \underline{\text{уравнение Бернулли}}$$

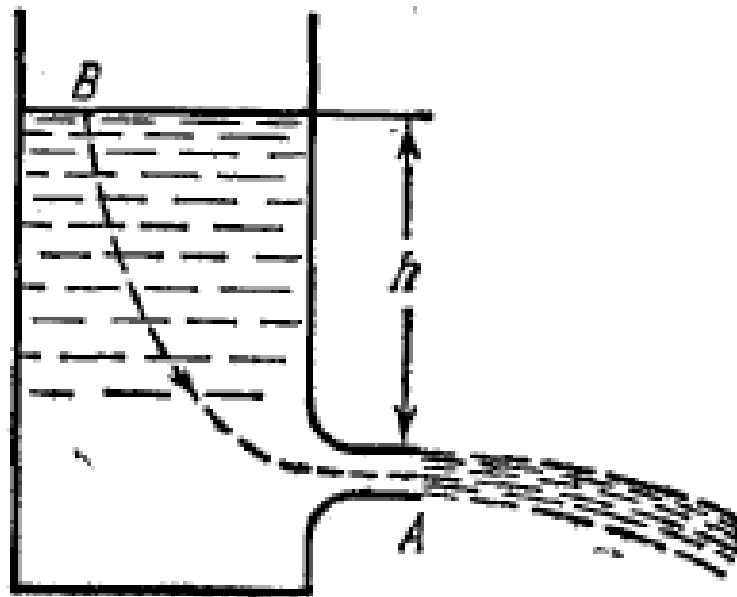
$\varepsilon$  - полная энергия единицы массы.

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = \text{const}$$

**Формула Торричелли** (о скорости истечения идеальной жидкости через малое отверстие в боковой стенке или дне широкого сосуда)

$$gh + \frac{P_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{P_0}{\rho},$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

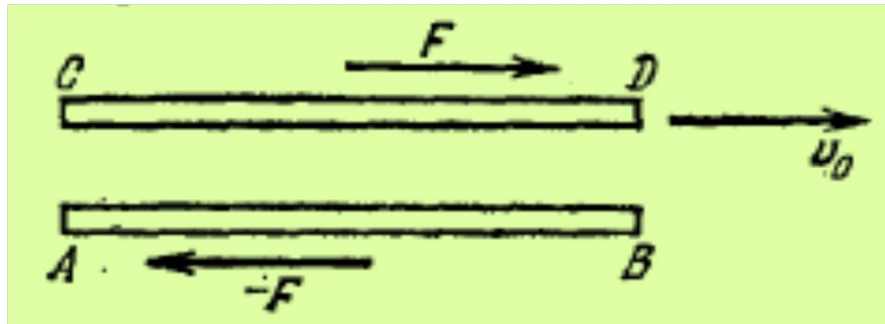




**Пример. Гидравлический удар.** Оцените давление, возникающее при мгновенном перекрывании сечения трубы, по которой течет жидкость, заслонкой.

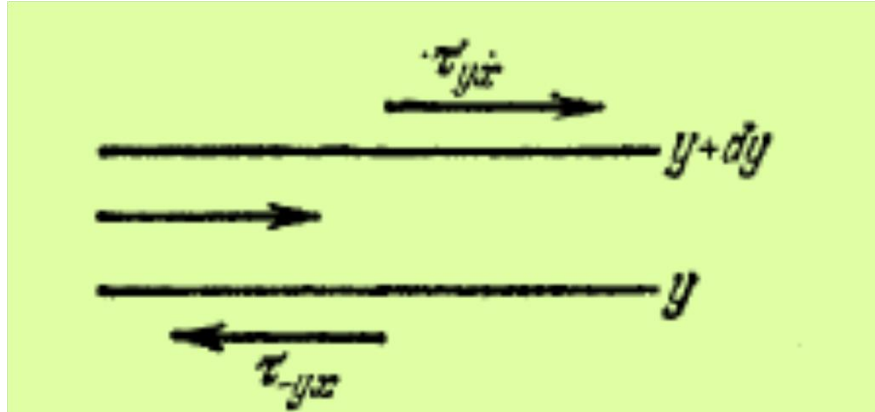
$$P = \rho v v_{36}$$

# 6. Вязкость. Течение Пуазейля. Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса.



$$F = \eta S \frac{v_0}{h}$$

$\eta$  - коэффициент внутреннего трения (вязкость)



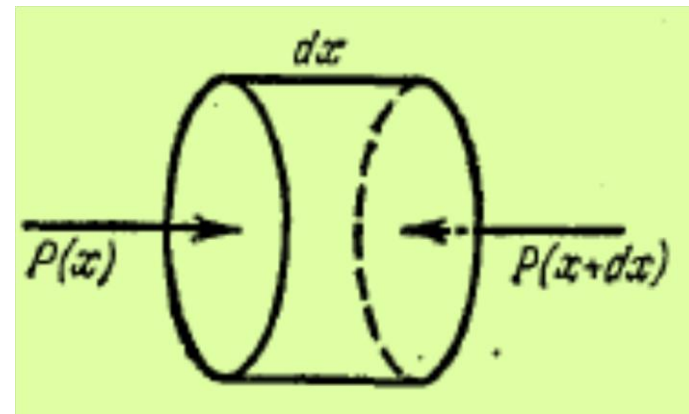
$$v_x = v_x(y), \quad v_y = v_z = 0$$

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

# Стационарное течение жидкости по прямолинейной трубе. Формула Пуазейля.

$$dF = 2\pi r \eta \frac{dv}{dr} dx$$

$$\begin{aligned} dF_1 &= \pi r^2 [P(x) - P(x + dx)] = \\ &= -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx \end{aligned}$$



При стационарном течении

$$dF = dF_1$$

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx}$$

Линии тока параллельны оси трубы.  
Скорость вдоль линии тока не зависит от  $x$ .

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{l}$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r$$

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C, \quad v(r = R) = 0$$

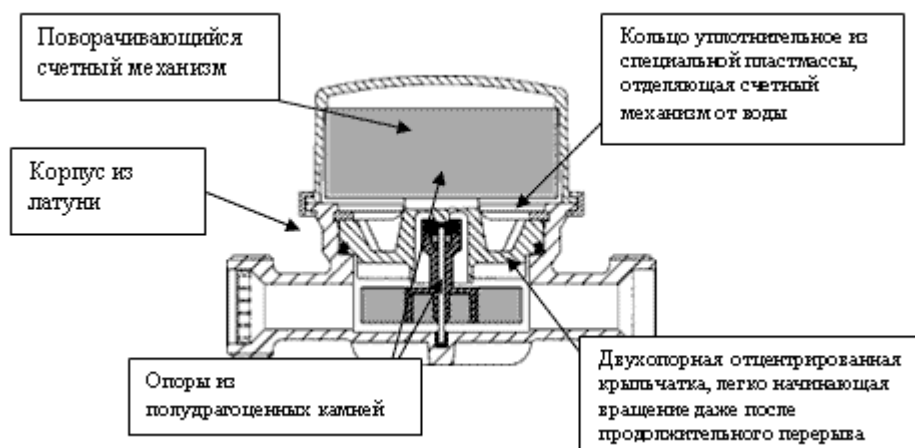
$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Формула Пуазейля для расхода жидкости (масса жидкости ежесекундно протекающая через поперечное сечение трубы )

$$dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot \rho v$$

$$Q = \pi\rho \cdot \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \pi\rho \cdot \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4$$

Формула Пуазейля применима только для ламинарного течения жидкости.



Вязкость воды:

при 0<sup>0</sup>C

$$\eta = 1,792 \cdot 10^{-2} \text{ г / (см} \cdot \text{с)}$$

при 20<sup>0</sup>C

$$\eta = 1,005 \cdot 10^{-2} \text{ г / (см} \cdot \text{с)}$$

**Ламинарным** называется такое течение, когда частицы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы. При больших скоростях ламинарное течение становится неустойчивым и переходит в **турбулентное** (быстрые и нерегулярные изменения гидродинамических характеристик).

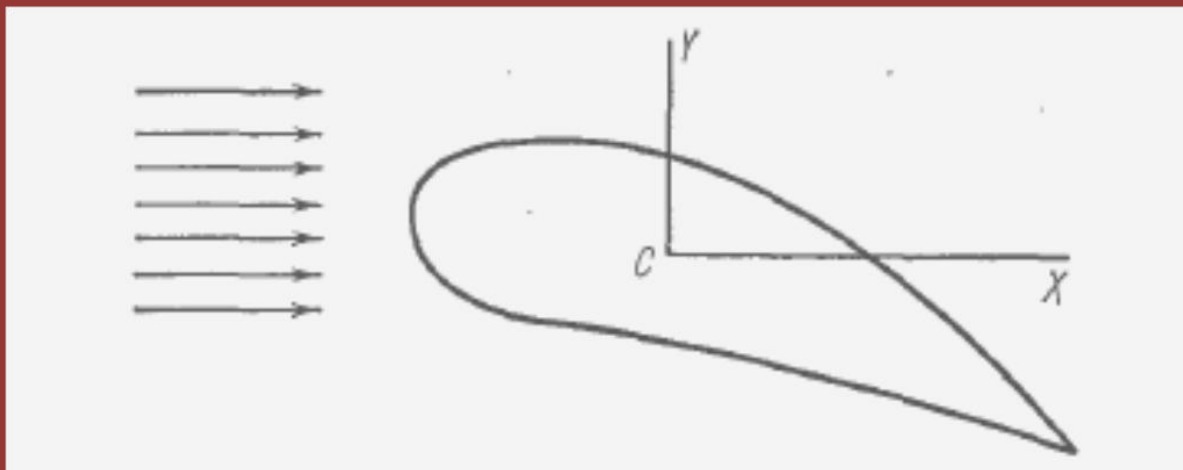
Число Рейнольдса  $Re$  определяет относительную роль инерции и вязкости жидкости при течении

Кинетическая энергия  $K = \frac{\rho v^2 l^3}{2}$

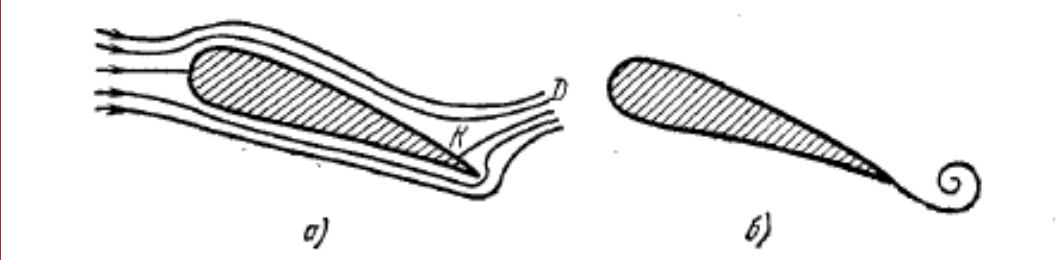
Работа сил трения  $A_{mp} = \eta \frac{v}{l} \cdot l^2$

$$Re = \frac{K}{A_{mp}} = \frac{\rho l v}{\eta}$$

## 7. Подъёмная сила крыла. Эффект Магнуса.



Для возникновения подъёмной силы необходимо, чтобы крыло было несимметрично или несимметрично расположено относительно горизонтальной плоскости.



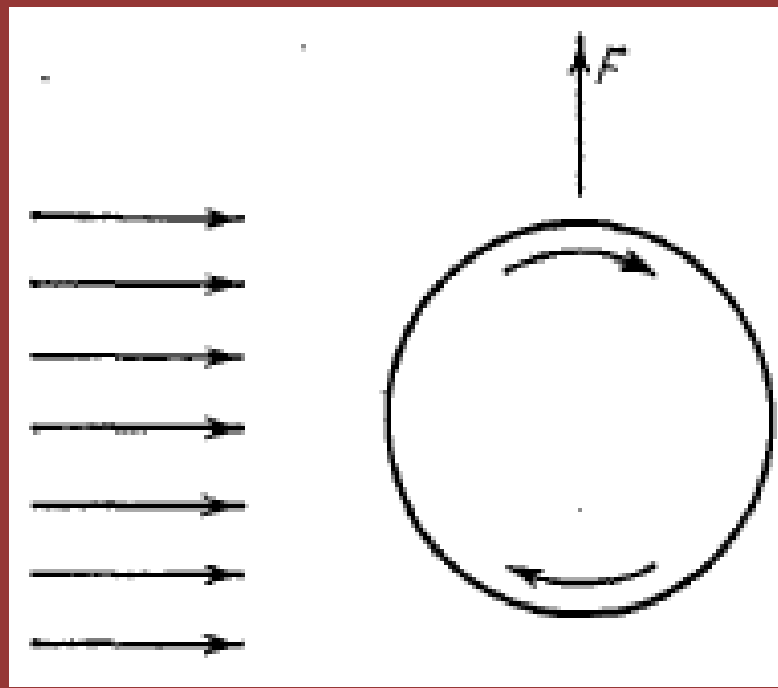
Вихри уносят момент количества движения, а вокруг крыла образуется **циркуляция по часовой стрелке.**

Скорость потока над крылом увеличивается, под крылом – уменьшается.

Давление под крылом растёт, над крылом - уменьшается.

Возникшая разность давлений проявляется в подъемной силе, направленной вверх, и горизонтальной силе сопротивления среды.





Эффект Магнуса: если вращающийся цилиндр обтекается равномерным потоком воздуха, то появляется подъёмная сила, перпендикулярная к направлению внешнего потока.