Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №7

1. Закон всемирного тяготения. Напряжённость гравитационного поля. Потенциальная энергия.
2. Теорема Гаусса.
3. Гравитационное поле Земли: напряжённость, потенциал.
4. Движение в центральном поле тяготения. Искусственные спутники и планеты. Законы Кеплера. Космические скорости. Параметры орбит.
5. Примеры.

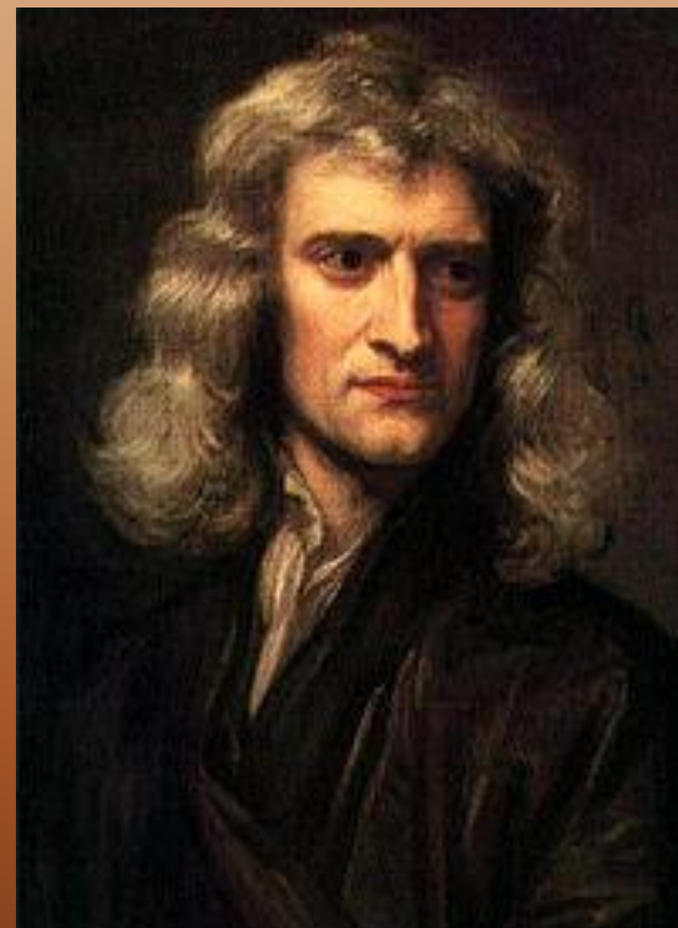
1.1. Закон всемирного тяготения.

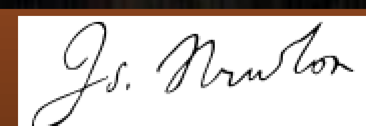
Закон всемирного тяготения: любые два тела (материальные точки) притягиваются друг к другу с силами, пропорциональными произведению их масс и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними:

$$F_{тяг} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

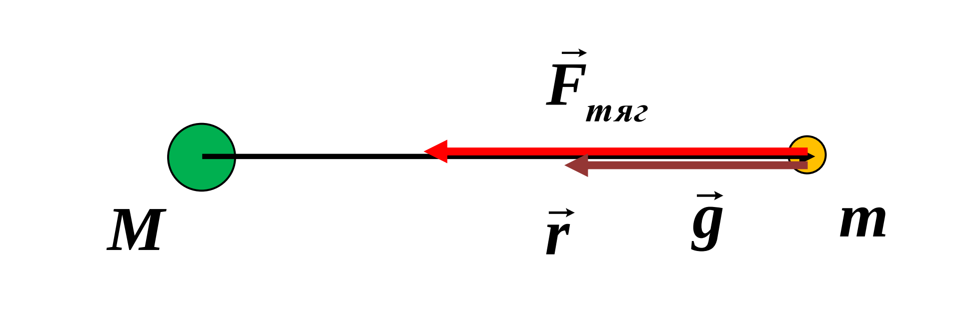
Гравитационная постоянная

$$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ Н \cdot м^2 / кг^2$$





1.2. Напряженность поля тяготения.



$$\vec{F}_{тяг} = -G\frac{Mm}{r^3}\cdot\vec{r}$$

Напряженность поля тяготения массы точечной массы M

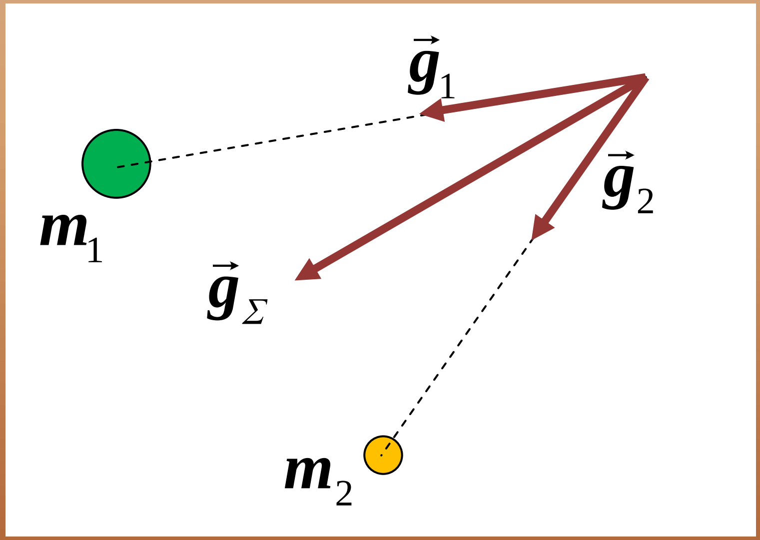
$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_{тяг}}{m} = -G\frac{M}{r^3}\cdot\vec{r}$$

1.3. Принцип суперпозиции.

Гравитационное поле, возбуждаемое какой-либо массой, не зависит от наличия других масс.

Напряженность гравитационного поля создаваемого несколькими телами, равно геометрической сумме напряженностей полей, возбуждаемых этими телами в отдельности.

$$\vec{g}_{\Sigma} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots + \vec{g}_N$$



1.4. Потенциальная энергия взаимодействия

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных масс

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Полная энергия «легкой» материальной точки массой m, движущейся в поле тяготения «тяжелой» материальной точки массой M

$$E = K + \Pi = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r}$$

2. Теорема Гаусса

2.1. Поток вектора напряженности $\vec{g}$ гравитационного поля через замкнутую поверхность равен

$$\Phi = \oint \vec{g} d\vec{S} = -4\pi G m,$$

m - масса внутри замкнутой поверхности.

2.2.Примеры применения теоремы Гаусса

а) Сферическая симметрия: однородный шар радиусом R , массой m и постоянной плотности ρ

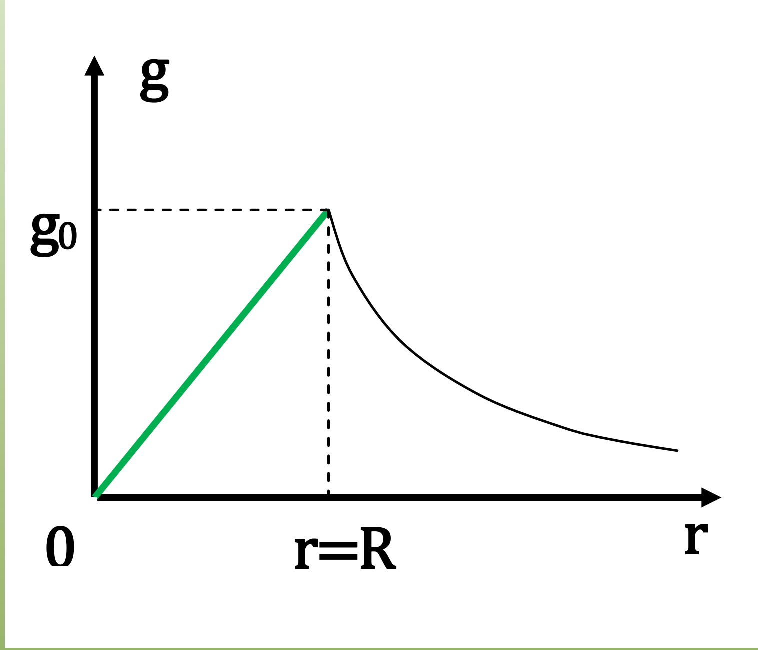
- при $r < R$ (внутри шара)

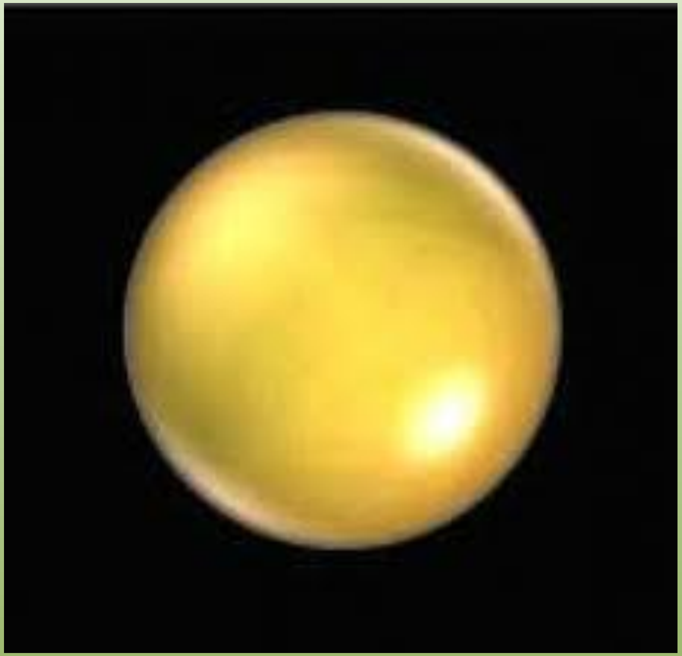
$$\vec{g} = -\frac{4\pi G\rho}{3}\cdot\vec{r},\ \ g = g_0\frac{r}{R},$$

$$g_0 = \frac{Gm}{R^2}$$

- при $r > R$ (вне шара)

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r},\quad g = g_0\frac{R^2}{r^2}$$



б) Симметрия относительно плоскости: однородный слой толщиной d и постоянной плотности ρ

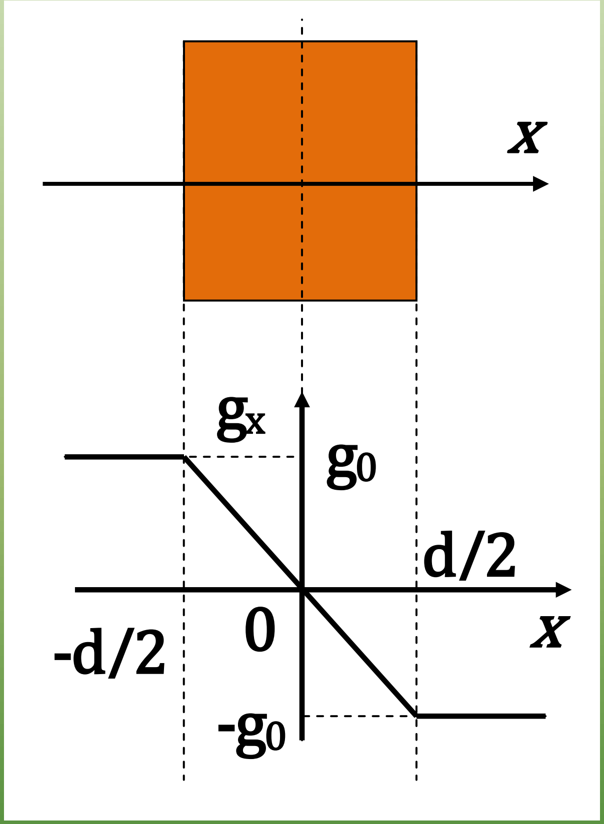
- при $|x| < d/2$ (внутри слоя)

$$g_x = -4\pi G\rho x,\ \ g_0 = 2\pi G\rho d$$

- при $|x| > d/2$ (вне слоя)

$$g_x = -g_0,\ \ x > d/2,$$

$$g_x = g_0,\ \ x < -d/2$$



3. Гравитационное поле Земли: напряженность и потенциал.

Напряженность

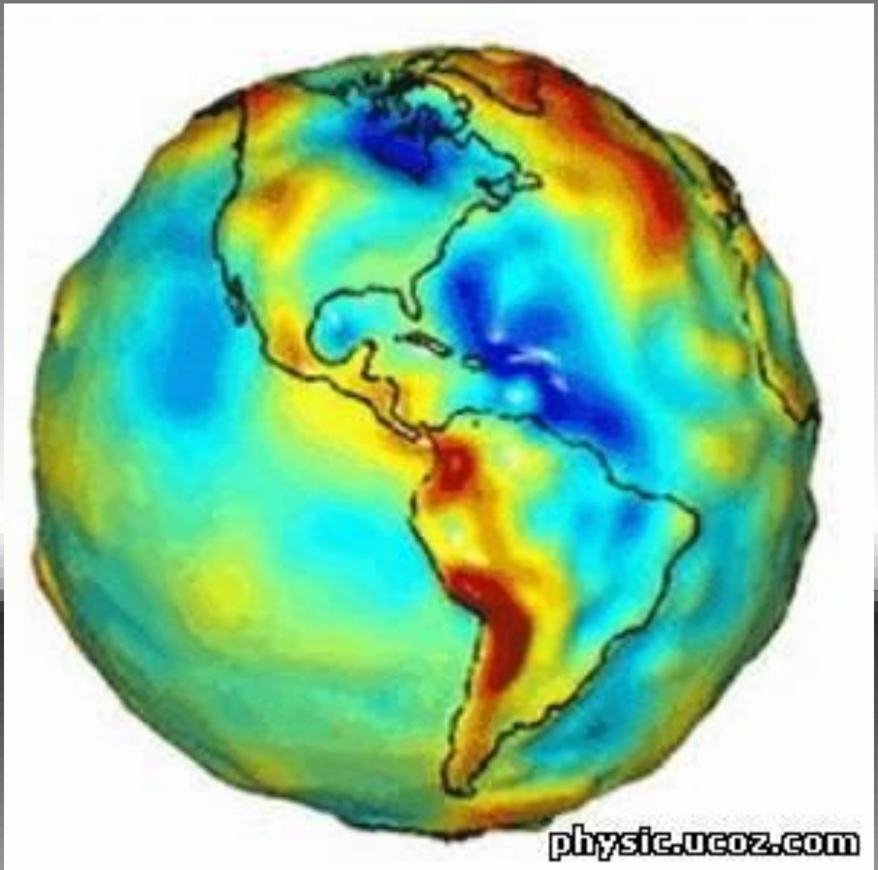
$$\vec{g} = -\frac{GM_З}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R_З$$

$$g_З = \frac{GM_З}{R_З^2} = 9{,}8\ м/с^2$$

Потенциал и потенциальная энергия

$$\varphi = -\frac{GM_З}{r}, \ r > R_З,$$

$$П = m\varphi = -\frac{GM_З m}{r}$$



4. Движение в центральном поле тяготения. Искусственные спутники и планеты. Законы Кеплера. Космические скорости. Параметры орбит.

4.1. Полная энергия планеты (или спутника) массой m в поле тяготения «неподвижного тяжелого центра»

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Момент импульса L планеты относительно «центра тяготения» сохраняется.

$$\vec{L} = \vec{r}, m\vec{v} = \left[\vec{r}, m \;\; \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi \;\; \right],$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2,$$

$$\left|\vec{L}\right| = L = mr^2\dot{\varphi} = const$$

Полную энергию можно записать как сумму кинетической энергии «радиального» движения и «эффективной» потенциальной энергии

$$E = K_r + \Pi_{эфф},$$

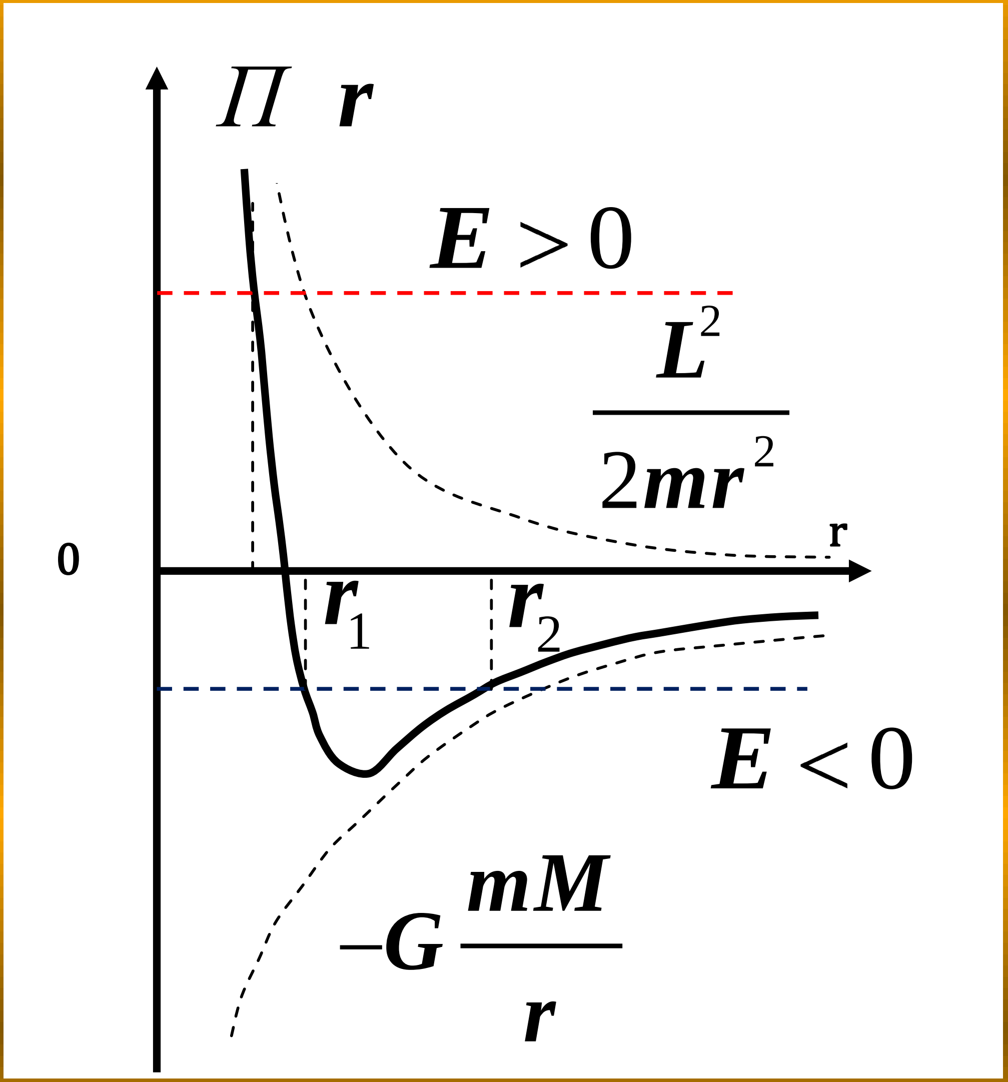
$$K_r = \frac{mv_r^2}{2}, \qquad \Pi_{эфф} = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

4.2. Условия эллиптического, параболического и гиперболического движений

$E > 0$ - гиперболическое движение,

$E = 0$ - параболическое движение,

$E < 0$ - эллиптическое движение



4.3. Параметры эллиптической орбиты.

Большая полуось эллипса

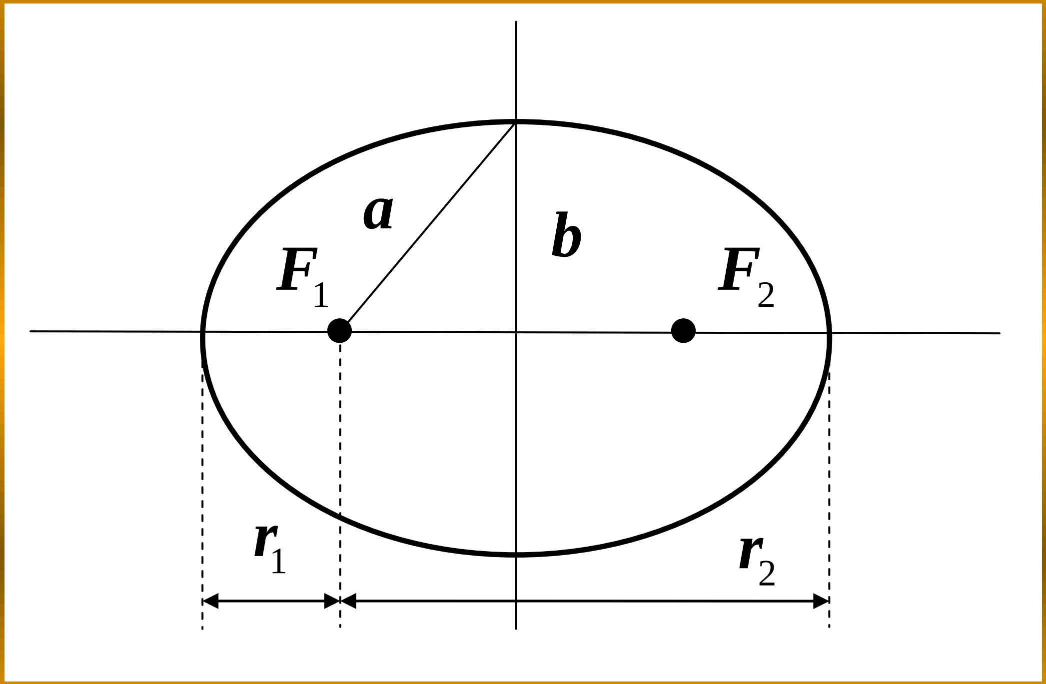
$$a = -GMm/\ 2E\ , \quad E < 0$$

Малая полуось эллипса

$$b = L/\sqrt{-2Em}$$

Период обращения по эллипсу

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$



4.4. Законы Кеплера.

I. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II. Радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади.

III. Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{2a_2^{\,3}}{2a_1^{\,3}}$$

4.5. Космические скорости.

I. Первая космическая скорость - скорость движения спутника по круговой орбите радиусом, равном радиусу Земли

$$v_{1,к} = \sqrt{\frac{GM}{R_з}} = \sqrt{gR_з} \approx 7,9\ км/с$$

II. Вторая космическая скорость – минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно никогда не вернулось на Землю*

$$v_{2,к} = \sqrt{2\frac{GM}{R_з}} = \sqrt{2gR_з} \approx 11,2\ км/с$$

III. Третья космическая скорость – минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло пределы Солнечной системы . Она зависит от того, в каком направлении космический корабль выходит из зоны действия земного тяготения.




5. Примеры.

Пример 1. На большом расстоянии от Земли метеорит движется относительно неё со скоростью v_0. При каком наибольшем расстоянии l метеорит будет «захвачен « Землей?

Закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - mgR$$

Закон сохранения момента импульса (для касательной траектории)

$$mv_0 l = mvR$$

$$l = R\sqrt{1 + \frac{2gR}{v_0^2}} = R\sqrt{1 + \frac{v_{2,K}^2}{v_0^2}}$$

Пример 2. Кто дальше? С полюса Земли запускают две ракеты, одну вертикально вверх, другую горизонтально. Начальные скорости обеих ракет равны v_0 , причем v_0 больше первой космической скорости и меньше второй. Какая из ракет удалится дальше от центра Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

а) Первая ракета. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR_з = -mg\frac{R_з^2}{r_1},$$

$$r_1 = \frac{2gR_з^2}{2gR_з - v_0^2}.$$

б) Вторая ракета. Точка наибольшего удаления от центра Земли – апогей. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR_З = \frac{mv_2^2}{2} - mg\frac{R_З^2}{r_2}$$

Из закона сохранения момента импульса

$$mv_0 R_З = mv_2 r_2$$

$$r_2 = \frac{v_0^2 R_З}{2gR_З - v_0^2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2gR_З}{v_0^2} = \left(\frac{v_{2,К}}{v_0}\right)^2 > 1$$

Пример 3. Орбита космического корабля «ВОСТОК» , но котором летал Ю. Гагарин, имела высоту в перигее $r_п = 181\ км$, а в апогее – $r_а = 327\ км$. Определите период обращения корабля вокруг Земли.

Период обращения спутника вокруг Земли при движении с первой космической скоростью

$$T_0 = \frac{2\pi R_З}{v_{1,К}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_З}{g}} = 1\ ч\ \ 24{,}4\ мин$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_0^2}\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_0\,\frac{2\boldsymbol{a}_1^{\ \ 3/2}}{2\boldsymbol{a}_0^{\ \ 3/2}} = \boldsymbol{T}_0\,\frac{2\boldsymbol{R}_З + \boldsymbol{r}_п + \boldsymbol{r}_а^{\ \ 3/2}}{2\boldsymbol{R}_З^{\ \ 3/2}} = 1\ \boldsymbol{ч}\ 29{,}1\ \boldsymbol{мин}$$

Пример 4. Космический корабль движется вокруг Солнца по той же круговой орбите, что и Земля, причем настолько далеко от Земли, что её влиянием можно пренебречь. Какую дополнительную скорость в направлении своего движении нужно сообщить кораблю, чтобы он смог достичь орбиты Марса, двигаясь по траектории, касающейся орбиты Марса? Радиус орбиты Земли $R_1 = 1{,}5 \cdot 10^8\ км$, радиус орбиты Марса $R_2 = 2{,}28 \cdot 10^8\ км$.

1) Скорость корабля на круговой орбите вокруг Солнца

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_c}{R_1}} \approx 30\ км/с, \quad E_1 = -\frac{GM_c m}{2R_1}$$

2) Так как отношение длин больших осей эллипсов орбит обратно пропорционально отношению энергий, то

$$\frac{2a_2}{2a_1} = \frac{R_1 + R_2}{2R_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{-\dfrac{GM_c m}{2R_1}}{\dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{GM_c m}{R_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_c R_2}{R_1 \quad R_1 + R_2}}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 \approx 2{,}9\ км/с$$

Время перелета $\tau = 0{,}5T_{ЗМ}$ **. По третьему закону Кеплера**

$$\frac{T_{зм}}{T_з} = \frac{2a_{зм}^{\quad 3/2}}{2a_з^{\quad 3/2}} = \frac{R_1 + R_2^{\quad 3/2}}{2R_1^{\quad 3/2}}, \ \tau \approx 260\ суток$$