

Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич



СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №12

Волны.

1. Гармоническая волна, её характеристики. Волновое уравнение. Стоячая волна.
2. Продольные упругие волны в твердом теле.
3. Упругие волны в жидкостях и газах.
4. Поперечные волны в струне.
5. Плотность и поток энергии в упругой волне. Интенсивность звука. Связь интенсивности звука с амплитудой давления.

1. Гармоническая волна, её характеристики. Волновое уравнение. Стоячая волна.

В физике **волной** называют всякое изменяющееся во времени пространственное чередование максимумов и минимумов **любой физической величины**, например, плотности вещества, давления, температуры, напряженности электрического поля и т.д.

Примеры волн: сейсмические, упругие, электромагнитные волны, волны вероятности.





$S(z, t)$ - одномерное волновое **возмущение**, сохраняя пространственную форму, перемещается вдоль оси z . $\Delta z = v \cdot \Delta t, \quad v > 0$

$$S(z, t) = S(z + \Delta z, t + \Delta t)$$

$$S(z, t) = S(z - vt), \quad \xi = z - vt$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

$S_{\pm}(z, t) = S(z \mp vt)$ - волны, бегущие в положительном $S_{+}(z, t)$ и отрицательном $S_{-}(z, t)$ направлениях оси z .

Плоская монохроматическая волна

$$S(z, t) = a \cdot \cos(\omega t - kz)$$

Волновое число $k = \frac{\omega}{v}$

Фаза волны $\Phi = \omega t - kz$

Поверхность, на которой колебания величины происходят S синфазно, т.е.

$$\Phi = \text{const}$$

для всех точек данной поверхности, называется **волновой поверхностью (волновым фронтом)**.

Плоская волновая поверхность

$$\Phi = \omega t - kz = \text{const}$$

Скорость, с которой перемещается волновая поверхность, называется **фазовой скоростью**

$$\Phi = \omega t - kz = \text{const}$$

$$\frac{dz}{dt} = V_{\Phi} = \frac{\omega}{k}$$

Расстояние между волновыми поверхностями, колебания на которых происходят с разностью фаз $\Delta\Phi = 2\pi$ называется **длиной ВОЛНЫ**

$$\Delta z = \frac{2\pi}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} v = vT$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad - \text{ период колебаний}$$

Стоячая волна.

$$S_1(z, t) = a \cdot \cos(\omega t - kz)$$

$$S_2(z, t) = a \cdot \cos(\omega t + kz)$$

$$S = S_1 + S_2 = 2a \cdot \cos(kz) \cdot \cos(\omega t)$$

Узлы стоячей волны (точки нулевой амплитуды)

$$z_n = \frac{\lambda}{4} \cdot (2n + 1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad |z_{n+1} - z_n| = \frac{\lambda}{2}$$

Сферическая волна

$$S(r, t) = \frac{a}{r} \cdot \cos(\omega t - kr)$$

Волновая поверхность – сфера.

Продольные и поперечные звуковые волны

Продольная волна: частицы среды совершают колебания вдоль направления распространения волны. Возникают при деформациях растяжения или сжатия. Возможны в твердых, жидких и газообразных средах.

Поперечная волна: частицы среды совершают колебания перпендикулярно направлению распространения волны. Возникают при деформациях сдвига. Возможны только в твердых средах.

2. Продольные упругие волны в твердом теле.

z - координата сечения стержня

ξ - смещение сечения, $\xi(z, t)$

Относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dz}$$

Закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon$$

σ - напряжение

E - модуль Юнга

Масса и ускорение участка стержня

$$m = \rho_0 S \Delta z, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a$$

Второй закон Ньютона для участка стержня

$$\rho_0 S \Delta z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \cdot \sigma(z + dz) - S \cdot \sigma(z)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

Волновое уравнение для ξ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{(E / \rho_0)} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Смещение $\xi(z, t)$ распространяется по стержню в виде волн вида

$$\xi = \xi(z \pm vt)$$

со скоростью (скорость звука в стержне)

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

Скорость звука в стали

$$E = 21,2 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2, \quad \mu = 0,29, \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5,2 \cdot 10^3 \text{ м / с} \quad - \text{ в тонком стержне}$$

Скорость звука в толстом стальном стержне
(возмущение только продольное)

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}, \quad E' = \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$$

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = 6,0 \cdot 10^3 \text{ м / с}$$



3. Упругие волны в жидкостях и газах.

P_0 - давление в газе, находящемся в равновесном невозмущенном состоянии

$$P(z) = P_0 + \Delta P(z),$$

$$P(z + \Delta z) = P_0 + \Delta P(z + \Delta z), \quad \Delta P \ll P_0$$

Второй закон Ньютона для порции газа

$$\rho S \Delta z \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \cdot (\Delta P(z) - \Delta P(z + dz))$$

$\xi(z, t)$ - смещение центра масс порции газа

$P = P(\rho, T)$ - давление в газе зависит от плотности газа и его температуры.

В силу малой теплопроводности газов и жидкостей процесс сжатия и разряжения происходит адиабатически, т.е. без теплообмена с соседними участками.

$$\Delta P = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\text{адиаб}} \Delta \rho$$

Масса рассматриваемой порции газа не изменяется

$$m = \rho V = (\rho + \Delta \rho)(V + \Delta V)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon \approx -\frac{\Delta \rho}{\rho}$$

$$\Delta P = -\rho \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\text{адиаб}} \varepsilon$$

Роль модуля Юнга играет величина

$$\rho \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\text{адиаб}}$$

Волновое уравнение для звуковых волн

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\left(\partial P / \partial \rho \right)_{\text{адиаб}}} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Скорость звука

$$v_{зв} = \sqrt{\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\text{адиаб}}}$$

Для идеального газа

$$P = \frac{\rho RT}{M}, \quad v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \text{ - показатель адиабаты}$$

Для воздуха

$$\gamma = 1,4$$

Скорость звука в воде (при $20^{\circ}C$)

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) = 46,8 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$$

$$v_{зв} = \frac{1}{\sqrt{\rho \alpha}} \approx 1462 \text{ м / с}$$

Скорость звука в водороде и в воздухе при нормальных условиях

$$v_{\text{водород}} = 1286 \text{ м / с}, \quad v_{\text{воздух}} = 331 \text{ м / с}$$

4. Поперечные волны в струне.

Натяжение постоянно в любом сечении

$$\sigma(z) = \sigma(z + dz) = \sigma = \text{const}$$

Уравнение движения для отрезка струны (из второго закона Ньютона)

$$\rho_0 S \Delta z \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = S \cdot \sigma \cdot (\sin \alpha(z + dz) - \sin \alpha(z))$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

Для малых отклонений

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Скорость распространения упругих волн в струне

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

$T = \sigma S$ - сила натяжения струны

$\rho_l = \rho S$ - погонная плотность

5. Плотность и поток энергии в упругой волне.

В волнах в направлении их распространения не происходит переноса вещества.

u - скорость участка стержня

$$w_K = \frac{\rho u^2}{2} \quad \text{- объёмная плотность кинетической энергии}$$

$$w_{II} = \frac{E \varepsilon^2}{2} \quad \text{- объёмная плотность потенциальной энергии}$$

Для гармонической волны

$$\xi = \xi(z, t) = a \cdot \cos(\omega t - kz),$$

$$u(z, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -a\omega \cdot \sin(\omega t - kz),$$

$$\varepsilon(z, t) = \frac{\partial \xi}{\partial z} = ak \cdot \sin(\omega t - kz)$$

Общая плотность энергии

$$\begin{aligned} w &= w_K + w_{II} = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{E \varepsilon^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (\rho \omega^2 + Ek^2) a^2 \cdot \sin^2(\omega t - kz) = \\ &= \rho \omega^2 a^2 \cdot \sin^2(\omega t - kz), \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E}{\rho} \end{aligned}$$

Средняя за период плотность энергии

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2$$

Интенсивность или сила звука - средняя величина потока энергии, переносимого звуковой волной в единицу времени через единичную площадку (в направлении нормали):

в твердых телах

$$I = \langle \sigma u \rangle = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \sqrt{\rho E} = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \rho v$$

В жидкостях и газах

$$I = \langle \Delta P \cdot u \rangle = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)} = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \rho v$$

Амплитуда акустического давления

$$\Delta P_0 = \sqrt{2 \rho v I}$$

Порог слышимости $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт} / \text{м}^2$

«Болевой порог» $10^{12} I_0 = 1 \text{ Вт} / \text{м}^2$

Амплитуда акустического давления при «болевым пороге» $\Delta P_0 = 30 \text{ Па}$

Интенсивность звука в децибеллах

$$\beta = 10 \lg(I / I_0)$$

В воде при интенсивности звука

$$I = 10^5 \text{ Вт} / \text{м}^2$$

амплитуда акустического давления
составляет

$$\Delta P_0 \approx 6 \text{ атм}$$

Кавитация. Большие градиенты акустического давления, возникающие при распространении ультразвуковых волн могут приводить к разрывам жидкости (образование пустот).

При частоте ультразвука 10^6 Гц градиент акустического давления составляет

$$2,4 \cdot 10^4 \text{ атм} / \text{м}$$

