Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ №9

Вращение твердого тела.

1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.
2. Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
3. Кинетическая энергия вращающегося тела.
4. Уравнения движения твердого тела.
5. Качение.
6. Пространственное движение твердого тела. Элементарная теория гироскопа.

1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Абсолютно твердое тело – это тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается постоянным при его движении (можно пренебречь его деформацией).

Поступательным движением называется движение, при котором отрезок, соединяющий две точки твердого тела, перемещается при движении параллельно самому себе. При этом все точки тела движутся одинаково, т.е. с одинаковыми скоростями и ускорениями.

<u>Вращательным движением</u> называется движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения, причем эти окружности лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Угловые скорости всех точек тела одинаковы. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ параллелен оси вращения. Его направление определяется по «правилу буравчика».

Вектор линейной скорости $\vec{v}$ точки тела определяется выражением

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$\vec{r}$ - радиус вектор точки, начало которого находится на оси вращения.

Движение твёрдого тела – это суперпозиция (наложение) поступательного и вращательного движений.

Если поступательное движение перпендикулярно к оси вращения, то все точки тела будут двигаться в параллельных плоскостях. Такое движение твердого тела называется плоским.

Пример плоского движения – качение цилиндра. Скорость каждой точки цилиндра:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$$

$\vec{v}_0$ – скорость оси цилиндра.

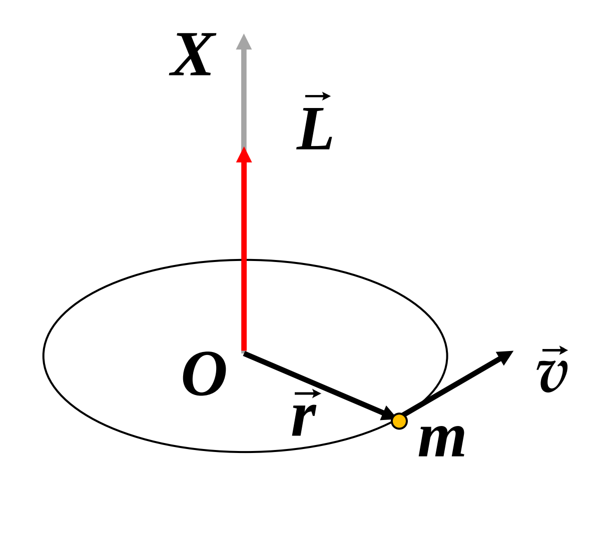


Уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Ось **ОХ** – ось вращения. Момент импульса для системы материальных точек

$$L_x = \sum_i m_i r_i^2 \omega_x = I_x \omega_x$$

$I_x = \sum m_i r_i^2$ - момент инерции системы материальных точек относительно оси вращения



Если M_x- момент внешних сил относительно оси вращения, то уравнение динамики вращательного движения твердого тела (уравнение моментов) относительно неподвижной оси вращения имеет вид

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x$$

2. Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Момент инерции – скалярная аддитивная величина, характеризующая распределение массы тела относительно оси вращения. В случае непрерывного распределения вещества в теле вычисление его момента инерции сводится к расчету интеграла

$$I = \int r^2 dm$$

r - расстояние от элемента массы dm до оси вращения.

Теорема Гюйгенса – Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I_A = I_C + ma^2$$

Теоремы **о** моменте инерции.

Сумма моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке О, равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки

$$I_x + I_y + I_z = 2\theta = \int r^2 dm$$

Момент инерции *плоского тела* относительно произвольной оси Z, перпендикулярной его плоскости, равен сумме моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей X и Y, лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью Z:

$$I_x + I_y = I_z$$

Примеры моментов инерции.

Тонкий однородный стержень: момент инерции относительно перпендикулярной оси, проходящей через его центр

$$I_C = \frac{1}{12} m l^2$$

Однородная прямоугольная пластина и прямоугольный параллелепипед: момент инерции относительно перпендикулярной оси Z, проходящей через её (его) центр

$$I_Z = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

Тонкое кольцо (обруч) и тонкостенный полый цилиндр: момент инерции относительно оси симметрии

$$I_Z = mR^2$$

Тонкий диск и сплошной однородный цилиндр: момент инерции относительно оси симметрии Z

$$I_Z = \frac{mR^2}{2}$$

Тонкостенный шар (сфера): момент инерции относительно его диаметра

$$I_Z = \frac{2}{3} mR^2$$

Сплошной однородный шар: момент инерции относительно его диаметра

$$I_Z = \frac{2}{5} mR^2$$

3. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Элементарная работа

$$dA = Fds = Frd\varphi = Md\varphi$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\omega_x r_i\right)^2 =$$

$$= \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 = \frac{I_x \omega_x^2}{2} = \frac{L_x \omega_x}{2} = \frac{L_x^2}{2I_x}$$

4. Уравнения движения твердого тела.

Уравнение движения центра масс твердого тела

$$m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}_{внеш}$$

Уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}$$

можно брать относительно произвольного неподвижного начала или относительно центра масс твердого тела, либо относительно произвольно движущегося начала, если только его скорость в любой момент времени параллельна скорости центра масс.

5. Качение твердого тела.

5.1. Определить ускорение центра масс тела, обладающее симметрией вращения, при скатывании с наклонной плоскости без проскальзывания.

Возможные варианты решения:

а) уравнение моментов записывается относительно мгновенной оси.

б) уравнение моментов записывается относительно оси, проходящей через центр масс.

в) использование закона сохранения энергии.


www.art-active.ru

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{I_c}{mr^2}}$$

I_C - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, r - радиус тела.

Тонкостенная труба $\left(I_C = mr^2\right)$:

$$a = 0{,}5 \cdot g \sin\alpha$$

Сплошная однородная труба $\left(I_C = 0{,}5mr^2\right)$:

$$a = \frac{2g \sin\alpha}{3}$$

Сплошной однородная шар $\left(I_C = (2/5)mr^2\right)$:

$$a = \frac{5g \sin\alpha}{7}$$

5.2. <u>Удары в бильярде-1</u>. Как надо ударить по бильярдному шару, чтобы сила трения о сукно заставляла его двигаться: а) ускоренно, б) замедленно, б) равномерно. Предполагается, что точка удара наносится в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс и точку касания его с плоскостью бильярдного стола.

$$h_0 = \frac{7}{5} R$$

а) при $h < h_0$ **- равнозамедленно (низкий удар),**

б) при $h > h_0$ **- равноускоренно (высокий удар),**

в) при $h = h_0$ **- равномерно (нормальный удар).**

5.3. <u>Удары в бильярде-2</u>. Как надо ударить по бильярдному шару, чтобы при столкновении с другим неподвижным шаром: а) оба шара стали двигаться вперед (удар с накатом), б) первый шар остановился, а второй двигался вперед, в) второй шар двигался вперед, а первый откатился назад (удар с оттяжкой). Предполагается, что точка удара наносится в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс и точку касания его с плоскостью бильярдного стола. Считать, что вращательное движение не передается при столкновении шаров.

а) при высоком ударе,

б) при нормальном ударе,

в) при низком ударе.


6. Пространственное движение твердого тела. Элементарная теория гироскопа.

$\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения тела относительно оси симметрии.

$\vec{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения оси симметрии относительно некоторой оси, пересекающейся с осью симметрии.

Общий момент импульса и его изменение

$$\vec{L} = \vec{L}_\omega + \vec{L}_\Omega, \quad \vec{L}_\omega = I_\omega \vec{\omega}, \quad \vec{L}_\Omega = I_\Omega \vec{\Omega}$$

$$d\vec{L} = d\vec{L}_\tau + d\vec{L}_n$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{L}_n}{dt} = \frac{d\vec{L}_\tau}{dt} + \left[\vec{\Omega}, \vec{L}\right]$$

Если момент импульса изменяется только по направлению, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{\Omega}, \vec{L}\right] = \vec{M}$$

Гироскоп – быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого способна изменять свое положение в пространстве.

Гироскопическое приближение

$$\left|\vec{L}_\omega\right| \gg \left|\vec{L}_\Omega\right|$$

Уравнение вынужденной регулярной прецессии гироскопа

$$\left[\vec{\Omega}, \vec{L}_\omega\right] = \vec{M}$$

При $\vec{M} = 0$ ось гироскопа сохраняет свое положение в пространстве.

Вектор угловой скорости прецессии

$$\vec{M} = \left[\vec{a}, \vec{F}\right], \qquad \vec{\Omega} = -\frac{a}{I_{\omega}\omega}\vec{F}$$

Применение гироскопов:

- управление движением самолетов, судов и т.д.
- навигационные системы (гирогоризонт, гирокомпас)


NW
N
NE
E
SE
S
SW
W
300
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20