



**МОДЕЛИ И КОНЦЕПЦИИ ФИЗИКИ:
МЕХАНИКА
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

МОСКВА
МФТИ
2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Кафедра общей физики

Модели и концепции физики: механика
Лабораторный практикум

МОСКВА
МФТИ
2011

УДК 530.1

С о с т а в и т е л и

М. Г. Гладуш, А. В. Гуденко, Ю. Н. Извекова, С. Д. Кузьмичев,
А. В. Максимычев, П. В. Попов, Ю. Н. Филатов

Р е ц е н з е н т

Доктор физико-математических наук, профессор *Э. В. Прут*

Модели и концепции физики: механика. Лабораторный практикум. — М.: МФТИ, 2011. — 49 с.

Представлены описания лабораторных работ по механике для студентов, обучающихся в МФТИ по направлению «Прикладная математика и информатика» и другим компьютерным специальностям.

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2011

Предисловие

В этом сборнике, состоящем из двух частей, представлен лабораторный практикум по механике для студентов, обучающихся в МФТИ по направлению «Прикладная математика и информатика» и другим компьютерным специальностям. Задача данного практикума — развить физическое мышление у студентов, которые в дальнейшем будут заниматься компьютерными технологиями. Основу физического мышления составляет умение построить наиболее простую модель изучаемого явления. Сопоставление модели с реальностью требует корректного учета конечной точности имеющихся данных. Исходя из целей курса приведены необходимые данные об экспериментальных погрешностях, их оценке и правильном представлении результатов. Каждая работа содержит теоретическое описание модели исследуемого явления, практическое задание и рекомендации по обработке полученных результатов. При составлении данного сборника за основу было взято учебное пособие «Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1. Механика» под редакцией А. Д. Глузуна, которое в свою очередь является результатом многолетнего труда преподавателей кафедры общей физики МФТИ.

В этой части сборника приведены описания лабораторных работ. Описание базовых принципов обработки экспериментальных данных и примеры обработки результатов представленных работ можно найти во второй части: «Модели и концепции физики: механика. Лабораторный практикум. Обработка результатов измерений».

Составители

Работа 1.1. Определение скорости полета пули при помощи баллистического маятника

Цель работы: определить скорость полёта пули, применяя законы сохранения и используя баллистический маятник; познакомиться с базовыми принципами обработки экспериментальных данных.

В работе используются: духовое ружье на штативе, осветитель, оптическая система для измерения отклонений маятника, измерительная линейка, пули и весы для их взвешивания, баллистический маятник.

Скорость вылета пули из духового ружья 150–200 м/с, из боевой винтовки ~ 1000 м/с. Это скорости большие по сравнению, скажем, со скоростью пешехода (~ 2 м/с) или даже автомобиля (~ 20 м/с). Поскольку размер лабораторной установки обычно порядка нескольких метров, время пролета пули составляет величину порядка 10^{-2} – 10^{-3} с. Для измерения таких величин необходима дорогостоящая аппаратура, регистрирующая быстропеременные процессы. Дешевле определить скорость пули по импульсу, передаваемому ею некоторому телу при неупругом соударении. В отсутствие внешних сил, а при кратковременном ударе даже и при действии внешних сил, импульс системы пуля–тело сохраняется. Если масса тела значительно больше массы пули, то скорость тела с застрявшей в нем пулей будет значительно меньше скорости пули, и ее легче измерить. Длительность неупругого соударения пули и тела, измеряемая с момента их соприкосновения до прекращения относительного движения, зависит от сопротивления, которое испытывает пуля при движении внутри тела. Оценить ее можно по глубине проникновения пули в тело, предполагая силу сопротивления постоянной. Если при скорости 200 м/с глубина проникновения ~ 1 см, то время соударения $\sim 10^{-4}$ с. За это время даже тело только в 100 раз более тяжелое, чем пуля, сдвинется всего на 0,1 мм. При малых временах соударения внешние силы конечной величины сообщают импульс, намного меньший импульса пули.

Для измерения переданного пулей импульса и, следовательно, ее скорости используют баллистический маятник. Баллистическим называется маятник, колебания которого вызываются кратковременным начальным импульсом (толчком). Кратковременным можно считать импульс, если время действия сил (время соударения) значительно меньше периода колебаний маятника. При этом отклонение маятника за время соударения значительно меньше амплитуды колебаний — максимального отклонения маятника.

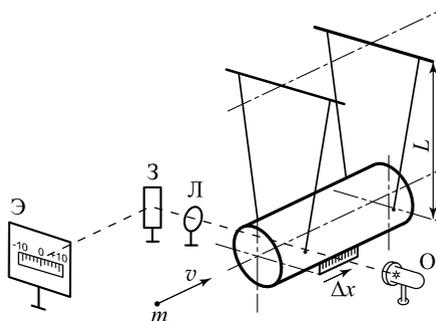


Рис. 1. Схема установки для измерения скорости полета пули

Используемый в этой работе баллистический маятник представляет собой тяжелый цилиндр, подвешенный на четырех нитях одинаковой длины. Он изображен на рис. 1 вместе с измерительной системой. Важной особенностью используемой системы подвески маятника является то, что при колебаниях ось цилиндра перемещается параллельно самой себе без вращения. Колебания происходят так, как будто вся масса маятника сосредоточена в его центре масс. Любая точка цилиндра при колебаниях маятника движется по дуге окружности, радиус которой равен расстоянию по вертикали между уровнями верхнего и нижнего концов нитей подвеса.

При проведении эксперимента необходимо позаботиться о том, чтобы после удара пули колебания маятника происходили в одной плоскости и отсутствовали поперечные движения. Достигается это соответствующей установкой ружья. При этом надо иметь в виду, что вслед за пулей из ружья выходит воздушная струя, которая может оказать влияние на движение маятника и исказить результаты опыта. Поэтому ружье должно располагаться на расстоянии, достаточном для растекания струи. Влияние струи газов на маятник можно оценить с помощью холостого выстрела.

Связь между максимальным отклонением маятника и начальной скоростью, полученной им в результате толчка, описывается законом сохранения механической энергии, если потери энергии за период значительно меньше энергии его колебаний. По начальному максимальному отклонению маятника определяются импульс и скорость пули.

Внешними силами для системы пуля–цилиндр являются сила тяжести, которая не имеет горизонтальной компоненты, и силы натяжения нитей, у которых появляются горизонтальные компоненты при отклонении маятника. Однако если отклонения малы, то и эти компоненты малы. Тем более мал по сравнению с импульсом пули их импульс за

время соударения. Поэтому закон сохранения импульса при соударении пули с цилиндром имеет вид

$$mu = (M + m)V. \quad (1)$$

Здесь m — масса пули, M — масса цилиндра, u — скорость пули перед ударом, V — скорость цилиндра и пули после неупругого соударения.

Учитывая, что масса маятника значительно больше массы пули, можно написать

$$u = \frac{M}{m}V. \quad (2)$$

Получив начальную кинетическую энергию, маятник при отклонении будет подниматься до тех пор, пока всю ее не израсходует. Если пренебречь потерями, то вся кинетическая энергия переходит в потенциальную в поле тяжести. Тогда по закону сохранения механической энергии высота h подъема маятника над его начальным положением связана с начальной скоростью маятника V следующим образом:

$$V^2 = 2gh. \quad (3)$$

Здесь g — ускорение свободного падения.

Высота подъема маятника выражается через угол φ отклонения маятника от вертикали:

$$h = L(1 - \cos \varphi) = 2L \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где } \varphi \approx \frac{\Delta x}{L}. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) получаем окончательную формулу для определения скорости пули ($\varphi \ll 1$):

$$u = \frac{M}{m} \sqrt{\frac{g}{L}} \Delta x. \quad (5)$$

Измерение отклонения маятника Δx производится с помощью оптической системы, изображенной на рис. 1. По увеличенному изображению шкалы, закрепленной на цилиндре, определяется ее горизонтальное смещение. Таким образом может быть измерено максимальное отклонение маятника и изменение максимальных отклонений для определения затухания колебаний.

Справедливость соотношения (3) и, следовательно, окончательной формулы (5) обусловлена возможностью пренебречь потерями энергии при колебаниях. Среди причин, вызывающих затухание колебаний маятника, наиболее существенными являются трение о воздух и недостаточно жесткое закрепление точки подвеса. Если потери энергии за четверть периода колебаний малы по сравнению с максимальной потенциальной энергией, которую маятник при этом приобретает, то их можно

не учитывать в законе сохранения (3). Затуханием можно пренебречь, если за десять периодов амплитуда колебаний уменьшается меньше, чем в два раза.

В качестве дополнительного упражнения в работе предлагается проверить выполнение закона аддитивности масс посредством измерения на аналитических весах масс всех пулек вместе и каждой по отдельности.

ЗАДАНИЕ

1. Ознакомьтесь с устройством баллистического маятника и измерительной установки, научитесь пользоваться духовым ружьем. Ружье закреплено на специальном штативе. Чтобы зарядить ружье, надо освободить стопорный винт штатива и наклонить ружье в держателе набок. Затем отогнуть ствол в сторону курка до упора. Зарядив ружье, все вернуть в первоначальное состояние.
2. Измерьте на аналитических весах суммарную массу всех пулек, полученных у лаборанта. Измерьте на аналитических весах массу каждой пульки, поместите их в ячейки коробки под соответствующими номерами, чтобы не перепутать при дальнейшем использовании. При использовании весами не забудьте арретировать их перед сменой пулек.
3. Измерьте с помощью двухметровой линейки расстояние L (см. рис. 1).
4. Соберите оптическую систему, предназначенную для измерения перемещения маятника. Включите осветитель и добейтесь четкого изображения шкалы на экране.
5. Произведите несколько холостых выстрелов по маятнику и убедитесь в том, что он практически не реагирует на удар воздушной струи из ружья.
6. Убедитесь в малом затухании колебаний: за десять колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем наполовину.
7. Исходя из параметров установки и взяв скорость пули порядка ~ 200 м/с оцените заранее возможную амплитуду отклонения маятника после выстрела. Подберите начало отсчёта x_0 , сдвигая экран или другие части оптической системы так, чтобы при выстреле маятник не вышел за пределы шкалы.
8. Произведите несколько выстрелов и измерьте отклонение маятника с помощью оптической системы. Если максимальное отклонение маятника по шкале составляет x_i , то соответствующая амплитуда колебаний есть $\Delta x_i = x_i - x_0$.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

- Используя результаты измерений масс пулек из п. 2, найдите среднее значение массы пулек, среднеквадратичное отклонение масс пулек от среднего значения, а также ошибку измерения среднего значения массы.
- Оцените погрешность измерения суммарной массы всех пулек, а также погрешность суммы отдельных измерений каждой пульки. Проверьте, выполняется ли аддитивность масс пулек?
- Определите по формуле (5) скорость пули при каждом выстреле.
- Оцените погрешность определения скорости пули в каждом выстреле.
- Найдите среднее значение скорости пули и разброс (среднеквадратичное отклонение) отдельных результатов относительно среднего значения. С чем связан наблюдаемый разброс: с ошибками опыта или с различием скоростей от выстрела к выстрелу?

Контрольные вопросы

- Сформулируйте законы сохранения импульса и механической энергии. При каких условиях они применимы?
- В каком случае маятник называется баллистическим и для чего он может быть использован?
- При каких условиях начальный импульс баллистического маятника равен импульсу пули?
- Почему необходимо использовать неупругое соударение пули с маятником?
- Оцените время соударения пули с маятником в проводимых опытах.
- От чего зависит точность выполнения закона сохранения импульса при соударении тел?
- Какая доля кинетической энергии пули переходит в тепло при соударении с маятником?
- Что влияет на затухание колебаний баллистического маятника?
- Какие допущения сделаны при выводе формулы (5)? Какие из них могут быть проверены экспериментально?
- Для чего нити подвеса разведены в поперечном направлении (см. рис. 1)?

Литература

- Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 26, 30, 33, 34, 41.
- Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 53, 124, 126.
- Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 22, 26, 67, 68, 89, 95.
- Лабораторный практикум по общей физике.* Т. 1. Механика / под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004. — С. 136.

Работа 1.2. Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса

Цель работы: измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчётами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса–Штейнера.

В работе используются: трифилярный подвес, секундомер, счётчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

Вращение твёрдого тела вокруг *неподвижной* оси может быть описано по аналогии с поступательным движением материальной точки. Аналогом скорости поступательного движения является *угловая скорость* вращения тела $\omega = \dot{\varphi}$, где φ — угол поворота тела относительно начального положения¹.

Запишем кинетическую энергию K тела, вращающегося с угловой скоростью ω . Скорость каждой точки с массой m_i равна $v_i = \omega r_i$, где r_i — расстояние от этой точки до оси вращения, тогда её кинетическая энергия есть $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i (\omega r_i)^2$. Для нахождения полной энергии надо просуммировать полученное выражение по всем точкам тела:

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i r_i^2 m_i = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (1)$$

Величина I может рассматриваться как вращательный аналог массы (ср. (1) с $K = \frac{1}{2}mv^2$), который называют *моментом инерции* твёрдого тела относительно выбранной оси. Переходя от суммирования по точкам к интегрированию по элементарным массам, I можно записать как

$$I = \int r^2 dm, \quad (2)$$

или как интеграл по объёму тела:

$$I = \int_V r^2 \rho dV, \quad (3)$$

где ρ — плотность вещества в точке интегрирования, r — расстояние от неё до оси вращения.

¹ Точка над функцией обозначает производную по времени.

Момент инерции также является мерой инертности тела при вращении вокруг неподвижной оси: динамическое уравнение, аналогичное 2-му закону Ньютона для движения материальной точки под действием силы \vec{F} , $m d\vec{v}/dt = \vec{F}$, представляет собой уравнение вращательного движения

$$I \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (4)$$

где M — момент силы \vec{F} относительно оси вращения (то есть проекция вектора \vec{M} на эту ось).

Вычисление моментов инерции. Найдём, например, момент инерции стержня длины l массы m относительно оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно стержню. Пусть x — расстояние от конца стержня, лежащего на оси, до точки интегрирования, тогда

$$I_{\text{ст}} = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m dx}{l} = \frac{ml^2}{3}. \quad (5)$$

Теорема Гюйгенса–Штейнера. Момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями a_0 :

$$I = I_0 + ma_0^2. \quad (6)$$

Используя теорему Гюйгенса–Штейнера легко найти момент инерции стержня относительно оси, проходящей через середину стержня $I_{\text{ст}0}$:

$$I_{\text{ст}0} = I_{\text{ст}} - m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12}. \quad (7)$$

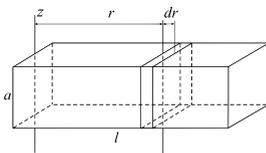


Рис. 1. Вычисление момента инерции бруска

Вычислим момент инерции бруска длины l квадратного сечения со стороной a относительно оси, проходящей через один из его концов — ось z на рис. 1. Разобьём брусок на бесконечно тонкие элементы — квадраты толщиной dr . Рассмотрим элемент, находящийся на расстоянии r от оси. Момент инерции тонкого квадрата со стороной a относительно оси, параллельной z и проходящей через его центр, равен моменту инерции стержня той же массы и длины a (почему?), то есть $\frac{1}{12} a^2 dm$, где dm — масса рассматриваемого элемента. По теореме Гюйгенса–Штейнера момент инерции этого же квадрата относительно оси z равен $(\frac{1}{12} a^2 + r^2) dm$. Учитывая,

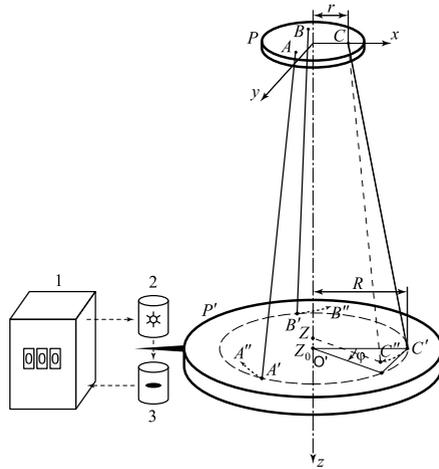


Рис. 2. Трифилярный подвес

что $dm = m dr/l$, найдём момент инерции бруска как сумму моментов инерции всех элементов, т. е.

$$I = \frac{m}{l} \int_0^l \left(\frac{a^2}{12} + r^2 \right) dr = \frac{ma^2}{12} + \frac{ml^2}{3}.$$

Исходя из этого нетрудно получить, что момент инерции параллелепипеда со сторонами a , b , c относительно оси, проходящей через центр масс параллельно стороне c , равен

$$I_c = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$$

Аналогично

$$I_a = \frac{m}{12} (b^2 + c^2), \quad I_b = \frac{m}{12} (a^2 + c^2).$$

Экспериментальная установка. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 2 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трёх симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' вращающейся платформы P' .

Платформа P укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав её раскачиваний, подобных движению маятника, учет которых сильно усложнил бы расчёты. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа оста-

ётся неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость (и кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебания.

Для счёта числа колебаний используется счётчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчётного устройства (1). Лёгкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчётное устройство.

Уравнение гармонических колебаний. Уравнение малых колебаний трифилярного подвеса выглядит следующим образом:

$$\boxed{I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0,} \quad (8)$$

где I — момент инерции тела вместе с платформой, m — их суммарная масса, z_0 — расстояние от центра нижней платформы O' до центра верхней O в положении равновесия, а R и r — расстояния от оси вращения до точки крепления нити на нижней и на верхней платформах соответственно (см. рис. 2).

Опишем схему вывода уравнения (8). Кинетическая энергия K (в силу (1)) и потенциальная энергия Π вращающегося вместе с платформой тела есть

$$K = \frac{1}{2}I(\dot{\varphi})^2, \quad \Pi = mgh,$$

где h — высота подъёма платформы относительно исходного положения, зависящая от угла поворота платформы φ . Из геометрии задачи можно показать (см. [4]), что при малых φ высота h пропорциональна φ^2 , где коэффициент пропорциональности определяется геометрическими параметрами подвеса:

$$h = \frac{1}{2}\frac{rR}{z_0}\varphi^2. \quad (9)$$

Пренебрегая потерями энергии на трение (о воздух и в креплениях нитей), а также энергией колебаний в вертикальном и поперечном направлениях по сравнению с энергией вращательного движения, запишем закон сохранения полной механической энергии $E = K + \Pi$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(K + \Pi) = 0.$$

Подставляя сюда конкретные выражения для K и Π при малых φ и воспользовавшись формулой для производной сложной функции $d(\varphi^2)/dt = 2\varphi\dot{\varphi}$, $d(\dot{\varphi}^2)/dt = 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$, после несложных преобразований получим (8).

Решение уравнения (8) представляет собой, как известно, *гармонические колебания*:

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(2\pi t/T + \theta), \quad (10)$$

где *амплитуда* φ_m и *фаза* θ определяются начальными условиями, а *период колебаний* равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}. \quad (11)$$

Параметры R , r и z_0 при проведении опытов не меняются, и поэтому удобно выразить момент инерции из (11) следующим образом:

$$I = kmT^2, \quad (12)$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ — величина, постоянная для данной установки.

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний.

Аддитивность моментов инерции. Момент инерции самого тела можно вычислить, воспользовавшись аддитивностью I — момент инерции составного тела (A+B) равен сумме моментов инерции его частей A и B (*докажите самостоятельно*):

$$I_{A+B} = I_A + I_B. \quad (13)$$

В справедливости аддитивности момента инерции предлагается также убедиться экспериментально, проводя измерения периодов колебаний двух тел по отдельности и вместе для нескольких пар различных тел из имеющегося набора.

Проверка сделанных теоретических предположений. При выводе (8) было сделано два важных предположения: о *малости амплитуды* колебаний и о *малости затухания*. Их справедливость можно проверить экспериментально:

1. О малости амплитуды можно судить по независимости T от φ_m . Для соответствующей проверки необходимо измерить период колебаний T_1 при некоторой амплитуде φ_1 и период T_2 при вдвое меньшей амплитуде $\varphi_2 = \varphi_1/2$. Если $T_1 \neq T_2$ с учётом погрешности опыта, то необходимо уменьшить рабочую амплитуду.

2. О затухании колебаний можно судить, сравнивая время τ уменьшения амплитуды колебаний в 2–3 раза с периодом колебаний T . Потерями энергии можно пренебречь, если $\tau \gg T$.

О погрешностях измерения. Период колебаний рекомендуется определять с относительной погрешностью $\varepsilon = 0,5\%$. Число колебаний N , по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью измерения времени σ_t :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_T}{T} = \frac{\sigma_t}{NT}. \quad (14)$$

В данной работе в ошибку измерения времени σ_t основной вклад вносят случайные факторы (в основном раскачка побочных не крутильных колебаний). Для оценки $\sigma_{t_{случ}}$ необходимо провести серию из измерений времени некоторого заранее выбранного числа колебаний платформы (каждый раз заново раскачивая платформу) и рассчитать случайную ошибку отдельного измерения.

ЗАДАНИЕ

1. Не нагружая нижней платформы, проверьте, пригодна ли установка для измерений, то есть нормально ли функционирует устройство для возбуждения крутильных колебаний, не возникают ли при этом нежелательные колебания платформы в вертикальной плоскости, работает ли счетчик числа колебаний.
2. Оцените погрешность измерения времени σ_t . Возможную систематическую ошибку оцените исходя из устройства вашего счётчика. Для оценки случайной погрешности проведите 5–6 измерений времени t 10–20 колебаний ненагруженной платформы (каждый раз заново раскачивая платформу). Суммарную погрешность найдите, сложив систематическую и случайную погрешность среднеквадратично.
3. Исходя из требований к точности опыта (относительная погрешность не хуже 0,5%) подберите согласно формуле (14) число колебаний N (для ненагруженной платформы), по которым необходимо измерять период T .
4. Найдите рабочий диапазон амплитуд колебаний. Для этого возбудите в ненагруженной установке крутильные колебания с некоторой амплитудой, на которой вы предполагаете работать. Измерьте время N колебаний. Возбудите колебания с вдвое меньшей амплитудой и, ещё раз измерив время N колебаний, проверьте, выполняется ли предположение о малости амплитуды. Если разность между измеренными временами

превышает погрешность измерения, то необходимо повторить измерения, уменьшив амплитуду ещё в 2 раза.

Рабочий диапазон начинается с тех амплитуд, для которых период совпадает с периодом колебаний с амплитудой вдвое меньшей.

5. Измерьте период колебаний платформы при найденной в предыдущем пункте рабочей амплитуде. Также измерьте время τ уменьшения амплитуды колебаний в 2 раза в результате затухания колебаний. Проверьте справедливость предположения о малости затухания.
6. Измерьте параметры установки: z_0 , R и r (см. рис. 2).
7. Измерьте периоды колебания платформы, нагруженной телами различной формы, имеющимися в наборе. Число колебаний при измерении определите исходя из требования к точности опыта.
8. Проверьте экспериментально аддитивность моментов инерции. Для этого измерьте периоды колебаний платформы, нагруженной несколькими комбинациями пар тел из имеющегося набора. Помещать тела на платформу надо так, чтобы общий центр масс всегда находился на оси вращения (оси симметрии) системы, то есть чтобы не было заметного перекоса платформы. Для удобства на платформе нанесён ряд concentрических окружностей.
9. Измерьте одну из сторон бруска с помощью штангенциркуля в 8–10 местах и запишите результаты измерения в таблицу. Измерьте остальные размеры бруска, а также всех тел, используемых в эксперименте.
10. Поместите на платформу диск, разрезанный по диаметру. Постепенно раздвигая половинки диска так, чтобы их общий центр масс всё время оставался на оси вращения платформы (рис. 3), снимите зависимость момента инерции такой системы I от расстояния h каждой из половинок до оси вращения (центра платформы).

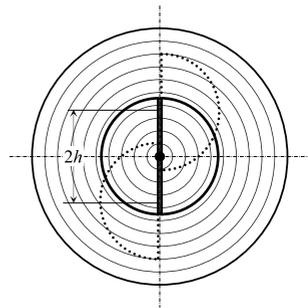


Рис. 3. Расположение тел на платформе

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

11. По измеренным в п. 7 задания параметрам установки вычислите константу установки k , входящую в формулу (12), и её погрешность σ_k .
12. Рассчитайте момент инерции ненагруженной платформы и определите его погрешность.
13. По измеренным периодам колебаний в п. 7 найдите моменты инерции используемых в работе тел.

14. По измеренным периодам колебаний найдите моменты инерции составных тел, используемых в п. 8. Сравнив полученные результаты с ошибкой опыта, сделайте вывод о том, подтверждают ли экспериментальные измерения закон аддитивности моментов инерции (13).
15. Усредните результаты измерения стороны бруска п. 9 и оцените погрешность результата. По геометрическим размерам и массе рассчитайте момент инерции I бруска, а также всех используемых в эксперименте тел и определите погрешности. Сравните результаты с измеренными значениями I .
16. Постройте график зависимости $I(h^2)$ и определите по нему массу m и момент инерции диска I_0 , учитывая, что момент инерции системы раздвинутых половинок определяется по формуле (*докажите самостоятельно*): $I = I_0 + mh^2$. По графику оцените погрешность результата. Сравните найденный момент инерции диска с моментом инерции, рассчитанным по его массе и радиусу.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента инерции.
2. Найдите момент инерции тонкого диска при вращении вокруг оси, проходящей через его центр масс, если а) ось перпендикулярна диску, б) лежит в плоскости диска.
3. Найдите момент инерции цилиндра при вращении вокруг оси, проходящей через его центр масс, если а) ось параллельна образующей цилиндра, б) проходит параллельно основаниям.
4. При каких упрощающих предположениях выведена формула (11)?
5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса–Штейнера.
6. Как определить погрешность углового коэффициента по графику?
7. Как в данной работе определяется погрешность момента инерции? Какие факторы вносят наибольший вклад в погрешность?
8. Каким образом можно уменьшить погрешность периода колебаний?
9. Рассчитайте, какая возникает погрешность в определении момента инерции бруска, если пренебречь его поперечными размерами.

Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 35, 36, 42.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 52, 55, 59.
3. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 67, 68, 89.
4. *Лабораторный практикум по общей физике.* Т. 1. Механика / под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004. — С. 149.

Работа 1.3. Изучение колебаний на примере физического маятника

Цель работы: исследовать физический и математический маятники как колебательные системы, измерить зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.

В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

Физическим маятником называется любое твёрдое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси и совершающее колебательное движение под действием возвращающих сил (рис. 1²). В рассматриваемом случае возвращающей силой является сила тяжести.

Колебания маятника в свою очередь представляют частный случай вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. При устойчивом равновесии центр масс маятника лежит на одной вертикали с точкой подвеса ниже её. При колебаниях прямая, соединяющая точку подвеса с центром масс, отклоняется от вертикали на угол φ . Если зависимость этого угла от времени $\varphi(t)$ будет определена, то мы получим точное математическое описание колебаний физического маятника.

Следовательно, для анализа особенностей движения маятника можно использовать основное уравнение вращательного движения относительно оси, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно к плоскости рисунка:

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где I — момент инерции маятника относительно оси вращения, M — суммарный момент всех сил, действующих на маятник. В пренебрежении силами трения M равен моменту силы тяжести, которая приложена

² O — точка подвеса, C — центр масс, O' — центр качания, m — масса, g — ускорение свободного падения. Характерные длины: $a = OC$, $a' = O'C$, $l_{\text{пр}} = OO'$ — приведённая длина.

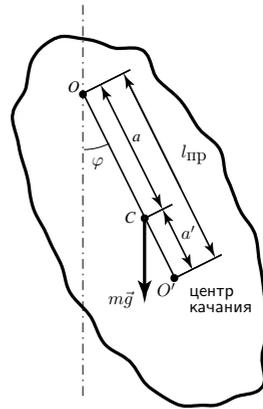


Рис. 1. Физический маятник

к центру масс маятника:

$$M = -mga \sin \varphi. \quad (2)$$

Здесь m — масса маятника, g — ускорение свободного падения, a — расстояние от точки подвеса O до положения центра масс C . Если в процессе колебаний угол $\varphi(t)$ всегда мал, то $\sin \varphi \approx \varphi$ и можно приближённо записать

$$M \approx -mga\varphi. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) с учётом (3) принимает вид

$$I\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0. \quad (4)$$

Полученное уравнение есть *уравнение гармонических колебаний*. Перепишем его в стандартном виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (5)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \quad (6)$$

— *циклическая частота* колебаний маятника.

Решением (5) является функция вида

$$\varphi(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (7)$$

Амплитуда колебаний A (максимальный угол отклонения) и начальная фаза α определяются начальными условиями задачи. *Период колебаний*, легко измеряемый на практике, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (8)$$

Если размер тела намного меньше длины (невесомого) подвеса l , то такое тело можно считать точечной массой (материальной точкой), а маятник *математическим*. В этом случае $I = ml^2$ и $a = l$. Поэтому период колебаний математического маятника равен

$$T_{\text{мат}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9)$$

Длину математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника, называют *приведённой*:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma}. \quad (10)$$

Точку, находящуюся на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от точки подвеса вдоль линии, проходящей через центр масс (точка O' на рис. 1), называют *центром качания*. Если перевернуть физический маятник, подвесив его за центр качания, то приведённая длина, а значит, и период колебаний не изменятся, при этом старая точка подвеса O станет новым центром качания.

Это нетрудно доказать исходя из теоремы Гюйгенса–Штейнера (см. описание работы 1.2). Момент инерции относительно центра масс равен $I_0 = I - ma^2$, момент инерции относительно новой оси подвеса — $I' = I_0 + ma'^2$, где $a' = l_{\text{пр}} - a$ — новое расстояние от точки подвеса до центра масс. Тогда с учётом того, что $I = mal_{\text{пр}}$, получаем

$$l'_{\text{пр}} = \frac{I'}{ma'} = \frac{mal_{\text{пр}} - ma^2 + m(l_{\text{пр}} - a)^2}{l_{\text{пр}} - a} = l_{\text{пр}}.$$

Экспериментальная установка. В данной работе в качестве физического маятника используется однородный стальной стержень длиной l (см. рис. 2). На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя расстояние a от точки опоры (точки подвеса) маятника до его центра масс. Используя теорему Гюйгенса–Штейнера (см. описание работы 1.2) и считая стержень тонким (его радиус много меньше длины), вычислим его момент инерции:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2.$$

Тогда, подставляя это выражение в формулы (8) и (10), получим основные характеристики используемого маятника — период его колебаний и приведённую длину:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \quad (11)$$

и

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}. \quad (12)$$

Величину a , входящую в (11), и положение точки подвеса можно изменять с помощью передвижной опорной призмы. Также можно сравнить приведённую длину маятника, вычисленную по формуле (12), с длиной математического маятника. В данной работе в качестве математического маятника используется свинцовый шарик, подвешенный на

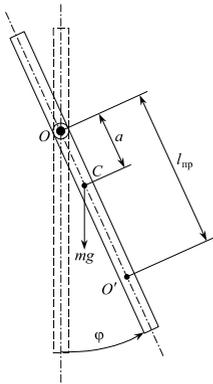


Рис. 2. Лабораторный вариант физического маятника

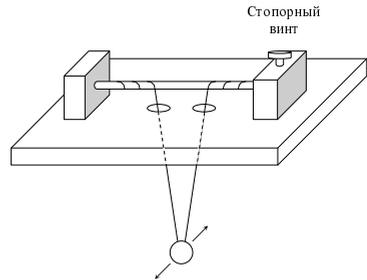


Рис. 3. Математический маятник

двух расходящихся нитях. Длину нитей можно изменять, наматывая их на ось (рис. 3).

Отклонения от гармоничности. При выводе основного уравнения (5) мы пренебрегли двумя эффектами: возможным наличием силы трения, приводящей к затуханию колебаний, и нелинейной зависимостью (3) момента возвращающей силы от угла φ , если угол нельзя считать малым. Рассмотрим возможное влияние этих факторов на колебательную систему.

Затухание. Предположим, что в системе имеют место потери энергии за счёт трения. Пусть это трение таково, что амплитуда уменьшается равномерно: за одно и то же время амплитуда $A(t)$ убывает в одно и то же число раз. Такую зависимость $A(t)$ можно представить в виде

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t},$$

где величина γ имеет смысл обратного времени затухания амплитуды в e раз и называется *коэффициентом затухания*.

Затухающее колебание исследуемой величины является комбинацией медленного убывания амплитуды и гармонических колебаний:

$$\varphi(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что (13) есть решение (при $\gamma < \omega_0$) следующего дифференциального уравнения:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (14)$$

Здесь ω_0 — собственная частота системы без затухания, а $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ — частота свободных колебаний при затухании. Если затухание мало, $\gamma \ll \omega_0$, то различие частот ω и ω_0 можно пренебречь: $\omega \approx \omega_0$.

Полученное уравнение (13) есть типичное уравнение затухающих колебаний, встречающееся повсеместно в различных разделах физики. В случае рассматриваемого нами физического маятника его можно получить, если учесть силу сопротивления воздуха, пропорциональную угловой скорости движения маятника — отсюда и дополнительное слагаемое $2\gamma\dot{\varphi}$.

Важнейшей характеристикой затухающего *осциллятора* (т. е. колеблющейся системы), является отношение характерного времени τ затухания амплитуды в несколько раз к периоду колебаний T . Чаще всего используется понятие *добротности*, определяемое как

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi \frac{\tau_e}{T}. \quad (15)$$

где $\tau_e = 1/\gamma$ — время убывания амплитуды колебаний A в e раз. Чем более добротной (чем больше Q) является колебательная система, тем больше колебаний она может совершить до их значительного затухания — например, число колебаний до затухания в e раз равно $n_e = Q/\pi$.

Нелинейность. Второй эффект, вызывающий отклонение закона колебаний маятника от гармонического, связан с тем, что возвращающая сила не пропорциональна отклонению. Пренебрегая затуханием и считая амплитуду не малой, воспользуемся выражением для момента силы тяжести (2) и получим вместо (5) следующее уравнение колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (16)$$

Функция (7) не является решением этого уравнения. Однако некоторое сходство остаётся: если амплитуда колебаний не настолько велика, чтобы маятник совершил полный оборот, то решением этого уравнения будет по-прежнему некоторая периодическая функция — такие колебания называют *ангармоническими*. Период колебаний при этом будет зависеть от амплитуды.

Если амплитуда колебаний A (выраженная в радианах) мала, то отклонение ΔT периода ангармонических колебаний от исходного значения T_0 оказывается пропорциональным квадрату амплитуды³:

$$\frac{\Delta T}{T_0} \approx \frac{1}{16} A^2.$$

³ Уравнение (16) интегрируется в квадратурах стандартными методами теории дифференциальных уравнений, однако выкладки слишком громоздки и мы их здесь не приводим. См, например, [3, работа 1.4.3]

ЗАДАНИЕ

1. Возбудите малые колебания маятника, отклонив его от вертикального положения на небольшой угол $A \sim 5\text{--}10^\circ$. Измерьте период колебаний, а также время и число колебаний, за которые амплитуда маятника уменьшается в два раза. Число колебаний измеряется электрическим или механическим счётчиком, а время — секундомером. Для уменьшения ошибки отсчёта времени секундомер включайте и выключайте в момент прохождения маятника через положение равновесия в одном направлении. То же самое проделайте для математического маятника. Рассчитайте добротности имеющихся маятников, сделайте вывод о применимости приближения малого затухания.
2. *Определите диапазон амплитуд, в пределах которого период T колебаний маятника можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого возбудите малые колебания физического маятника, отклонив его от вертикального положения на угол $A \sim 20\text{--}30^\circ$. Измерьте время 20 колебаний. Повторите опыт, уменьшив начальное отклонение A в два раза, а затем еще в два. Определите периоды колебаний T .
Зависит ли период колебаний от амплитуды в пределах точности эксперимента?
При необходимости, если периоды колебаний не совпадут, измерьте значение T при ещё меньших амплитудах.
3. Перемещая опорную призму вдоль стержня, исследуйте зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс. Результаты изобразите на графике, откладывая по осям величины T^2a и a^2 . Аппроксимируя полученную зависимость прямой линией, найдите по этому графику величины $g/4\pi^2$ и $l^2/12$, используя формулу (11). Сравните найденное значение g с табличным, а величину l — с результатом непосредственных измерений.
4. Для одного из положений призмы подберите длину математического маятника так, чтобы в пределах точности измерений периоды колебаний обоих маятников совпали. Измерьте длину математического маятника и сравните её с приведённой длиной физического маятника, вычисленной по формуле (12).
5. Проверьте на опыте обратимость точки подвеса (опоры) и центра качания физического маятника. Подумайте, при каких положениях опорной призмы эта проверка выполняется более точно.

Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником? Математическим маятником?
2. Что называется амплитудой, периодом и фазой колебаний?

3. При каких условиях колебания физического маятника можно считать гармоническими?
4. В каких положениях колеблющегося маятника максимальны его скорость и ускорение?
5. При каком расстоянии от центра масс до точки подвеса период колебаний маятника минимален?
6. Как будет вести себя физический маятник, если совместить точку его подвеса с центром масс?
7. С какой целью в данной работе математический маятник подвешивается на двух нитях?
8. Получите уравнение гармонических колебаний (4) физического маятника из закона сохранения энергии.
9. Запишите зависимости от времени угла φ отклонения физического маятника от вертикали для двух случаев: а) в начальный момент маятник отклонен от вертикали на угол φ_0 и неподвижен, б) в начальный момент угол φ равен нулю, а маятник вращается с угловой скоростью ω_0 .
10. Запишите зависимость момента импульса маятника от времени при гармонических колебаниях.
11. Запишите зависимости от времени кинетической и потенциальной энергий маятника при гармонических колебаниях.
12. Оцените величину силы, действующей на ось маятника в момент прохождения им положения равновесия при гармонических колебаниях.
13. Определите модуль и направление вектора ускорения центра масс маятника в крайнем положении и в момент прохождения им положения равновесия.

Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 30, 33, 35, 36, 40, 41.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 52, 59, 124.
3. *Лабораторный практикум по общей физике.* Т. 1. Механика / под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004. — С. 246.

Работа 1.4. Исследование вынужденной прецессии гироскопа

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию уравновешенного симметричного гироскопа; установить зависимость угловой скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; по угловой скорости прецессии определить угловую скорость вращения ротора гироскопа

В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

Гироскопом называют быстро вращающееся твёрдое тело, ось вращения которого способна изменять своё положение в пространстве. Простейшим повседневным примером гироскопа является детский волчок. В данной работе рассматривается широко применяемый в технике роторный гироскоп. Характерным свойством таких устройств является стабильность оси вращения, которая обеспечивается законом сохранения *вращательного момента (момента импульса)*.

Произвольное вращение твёрдого тела с одной неподвижной точкой описывается *уравнением моментов*:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}, \quad (1)$$

где \vec{L} — момент импульса системы, а \vec{M} — момент внешних сил относительно фиксированной точки.

Если тело не закреплено, то уравнение (1) должно быть записано относительно центра масс системы, а к нему добавлена теорема о движении центра масс: $m d\vec{V}/dt = \vec{F}$, где \vec{F} — сумма внешних сил, а \vec{V} — скорость центра масс.

Мы будем рассматривать один из простейших случаев⁴ — движение симметричного волчка, закреплённого в центре масс (такой гироскоп называют *уравновешенным*), быстро вращающегося вокруг своей оси симметрии.

Любое движение твёрдого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно рассматривать как вращение вокруг *мгновенной оси*, проходящей через эту точку. С течением времени мгновенная ось может перемещаться как в теле, так и в пространстве. Для описания вращения

⁴ В общем случае задача о вращательном движении твёрдого тела под действием внешних сил не имеет точного решения.

вводится вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. Его модуль задаёт темп изменения угла поворота, а направление — мгновенную ось вращения согласно правилу правого винта.

Движение *осесимметричного* тела удобно разбить на две составляющие — выделить из вектора полной угловой скорости $\vec{\omega}$ угловую скорость вращения оси симметрии $\vec{\Omega}$, которую обычно называют *угловой скоростью прецессии*, и $\vec{\omega}_0$ — угловую скорость «собственного» вращения:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}. \quad (2)$$

Для определения кинематики вращения тела исходя из (1) необходимо дополнительно выразить связь между \vec{L} и $\vec{\omega}$. Важно отметить, что в общем случае вектор угловой скорости и вектор момента импульса не сонаправлены.

Вектор $\vec{\Omega}$ в рассматриваемом нами случае (осесимметричный волчок) может быть разложен ещё на две составляющие: вдоль оси симметрии и перпендикулярно ей $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\parallel} + \vec{\Omega}_{\perp}$. Тогда момент импульса ротора гироскопа также представится в виде суммы своих составляющих: продольной и поперечной

$$\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp} = I_{\parallel}\vec{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\vec{\omega}_{\perp} = I_{\parallel}(\vec{\omega}_0 + \vec{\Omega}_{\parallel}) + I_{\perp}\vec{\Omega}_{\perp}, \quad (3)$$

где I_{\parallel} — момент инерции тела относительно оси симметрии, I_{\perp} — момент инерции относительно любой перпендикулярной ей оси.

Описание движения гироскопа существенно упрощается в случае быстрого вращения ротора гироскопа вокруг собственной оси.

Если $I_{\parallel}\omega_0 \gg I_{\perp}\Omega$, то можно считать, что вектор угловой скорости практически сонаправлен с вектором момента импульса, и оба они почти совпадают с геометрической осью тела — в этом и заключается основное приближение, используемое при описании движения гироскопа:

$$\vec{L} \approx I_{\parallel}\vec{\omega}_0 = I_{\parallel}\omega_0 \vec{s}, \quad (4)$$

где \vec{s} — единичный вектор вдоль оси симметрии гироскопа (оси вращения ротора).

В зависимости от того, приложены или нет к гироскопу какие-либо внешние силы, различают два типа его движения:

1. Если момент внешних сил равен нулю, $\vec{M} = 0$, то согласно (1) сохраняется момент импульса системы:

$$\vec{L} = \text{const.}$$

Если раскрутить гироскоп исходно только вокруг своей оси (т. е. $\Omega = 0$), то приближение (4) становится точным равенством и из него следует, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_0$ также должен оставаться неизменным по модулю и направлению, а следовательно, и ось гироскопа (вектор \vec{s}) должна сохранять свою ориентацию в пространстве при любом перемещении центра масс системы.

В этом проявляется важнейшее свойство уравновешенного гироскопа — *сохранять свою ориентацию относительно инерциальной системы координат*. Так, если ось гироскопа исходно направлена на какую-либо далёкую звезду, то при любых перемещениях прибора и малых толчках она будет сохранять своё направление (чем больше скорость вращения ротора, тем лучше выполняется приближение (4) и тем устойчивее ось прибора к малым возмущениям). К примеру, ось гироскопа, закреплённого на поверхности Земли, будет в течение суток медленно поворачиваться, что исторически явилось первым экспериментальным доказательством суточного вращения Земли вокруг собственной оси (Л. Фуко, 1852 г.).

Движение, возникающее в случае выведения свободного уравновешенного гироскопа из указанного положения равновесия (в результате, например, сильного удара по оси), называют *свободной регулярной прецессией*. В данной работе свободную прецессию можно наблюдать, если при небольшой скорости вращения ротора выключить электродвигатель и сообщить оси гироскопа некоторый дополнительный момент импульса, перпендикулярный этой оси (например, ударив по ней карандашом) — ось гироскопа при этом начнёт быстро вращаться (прецессировать) вокруг своего исходного направления.

Для описания свободной прецессии необходимо пользоваться точным выражением (3). В общем случае \vec{L} , $\vec{\omega}$, \vec{s} — три неколлинеарных вектора, однако в силу (3) и закона сохранения момента импульса, $\vec{L} = \text{const}$, они должны всё время оставаться в одной плоскости. При этом и ось тела \vec{s} и мгновенная ось вращения $\vec{\omega}$ вращаются (прецессируют) вокруг фиксированного \vec{L} . Если известно значение L , то непосредственно из (3) может быть найдена перпендикулярная составляющая угловой скорости прецессии:

$$\Omega_{\perp} = \frac{L_{\perp}}{I_{\perp}} = \frac{L \sin \theta}{I_{\perp}},$$

где θ — угол между осью гироскопа \vec{s} и моментом импульса \vec{L} . А поскольку, как уже сказано, прецессия происходит вокруг \vec{L} , то $\vec{\Omega} \parallel \vec{L}$ и, значит,

$$\Omega = \frac{\Omega_{\perp}}{\sin \theta} = \frac{L}{I_{\perp}}. \quad (5)$$

Если угол θ мал, то имеем $\omega_{\parallel} \gg \omega_{\perp}$, $L \approx I_{\parallel} \omega_0$, и, следовательно,

$$\Omega \approx \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} \omega_0. \quad (6)$$

2. Если же приложить к исходно уравновешенному гироскопу внешнюю силу с ненулевым моментом $\vec{M} \neq 0$, то гироскоп придёт в движение, причём характер его будет весьма необычным. Исследованию этого движения и посвящена основная часть данной работы.

Уравнение вращательного движения (1) легко решается в «гироскопическом» приближении (4), т. е. в предположении, что весь момент импульса \vec{L} ротора гироскопа направлен вдоль его оси симметрии. При этом \vec{L} **будет вращаться вместе с осью гироскопа** \vec{s} с некоторой угловой скоростью $\vec{\Omega}$, которая должна быть много меньше скорости собственного вращения: $\Omega \ll \omega_0$.

Для нахождения уравнения движения оси гироскопа воспользуемся следующей аналогией: если некоторый радиус-вектор \vec{r} вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, то линейная скорость движения его конца равна

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{r},$$

где учтено, что скорость — это производная от радиуса-вектора, а знак \times обозначает векторное произведение векторов. Следовательно, движение оси определяется аналогичным соотношением: уравнение вращения вектора \vec{s} есть

$$\boxed{\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{s}.} \quad (7)$$

Тогда с учётом базового уравнения моментов (1) и приближения (4) получим основное уравнение *вынужденной регулярной прецессии* гироскопа:

$$\boxed{\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}.} \quad (8)$$

Это уравнение служит для определения скорости прецессии $\vec{\Omega}$ по заданному моменту внешних сил \vec{M} . В рамках использованного приближения вектор \vec{L} направлен вдоль оси гироскопа и по модулю равен $L = I_0\omega_0$, где ω_0 — скорость вращения ротора, I_0 — его момент инерции.

Рассмотрим два необычных свойства динамики гироскопа, следующих из уравнений (7) и (8):

1. В движении гироскопа отсутствует инерция: как только $\vec{M} = 0$, то сразу $\vec{\Omega} = 0$ и ось гироскопа мгновенно останавливается, а как только $\vec{M} \neq 0$, ось мгновенно приходит в движение.
2. При воздействии на ось гироскопа внешней силой \vec{F} , её точка приложения будет двигаться отнюдь не в направлении \vec{F} , а наоборот, будет стараться как бы уйти из-под внешнего воздействия. Действительно, пусть к точке на оси с радиусом-вектором $\vec{r} = r\vec{s}$ приложена сила \vec{F} (центр координат в центре масс гироскопа, r — расстояние от ц. м. до точки приложения силы). Тогда по определению момента сил

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (9)$$

Перепишем (8) как $\vec{\Omega} \times \vec{s} = \vec{M}/(I\omega_0)$, откуда получим, что точка приложения движется со скоростью

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = r \vec{\Omega} \times \vec{s} = \frac{r\vec{M}}{I_0\omega_0},$$

а значит, в силу (9) $\vec{v} \perp \vec{F}$ (в отличие от ожидаемого из законов Ньютона для материальной точки $\vec{v} \parallel \vec{F}$).

Заметим, что определять направление вращения гироскопа по заданной внешней силе \vec{F} удобно непосредственно из (1) — направление вектора \vec{M} указывает, куда направлена производная момента импульса $d\vec{L}/dt$, и именно в этом направлении и будет вращаться ось гироскопа (см. рис. 1). Также можно решить и обратную задачу: по вращению оси (т.е. исходя из направления $d\vec{s}/dt$, а значит, и $d\vec{L}/dt$) определить, как приложены внешние силы к гироскопу (например, по медленному опусканию оси при регулярной прецессии можно определить, как приложена сила трения в оси подвеса гироскопа, а величину этой силы можно определить из (8)).

В работе предлагается исследовать вынужденную прецессию гироскопа, вешая на его ось грузики небольшой массы. Если ось гироскопа наклонена к горизонту под углом α (см. рис. 2), а груз массы m_r подвешен на расстоянии r от центра, то согласно (9) момент внешней силы равен $M = mgr \cos \alpha$ (иными словами, он равен произведению силы на её плечо — расстояние от линии приложения силы до точки отсчёта), и направлен перпендикулярно оси гироскопа и вертикальному направлению. Тогда из (8) получаем угловую скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{M}{L \sin \angle(\vec{L}, \vec{\Omega})} = \frac{m_r g r \cos \alpha}{I_0 \omega_0 \sin(\pi/2 - \alpha)} = \frac{m_r g r}{I_0 \omega_0}. \quad (10)$$

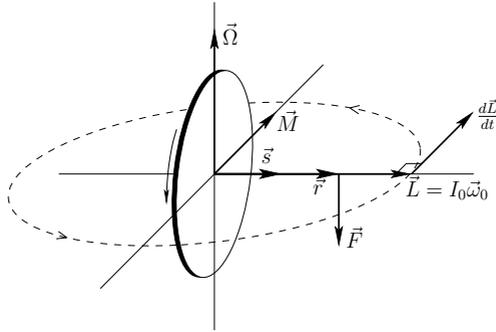


Рис. 1. Вынужденная прецессия гироскопа

Вектор $\vec{\Omega}$ направлен вертикально, т. е. гироскоп под действием веса грузика придёт во вращение вокруг вертикальной оси, а скорость этого вращения не зависит от угла наклона оси гироскопа к горизонтали. По времени оборота гироскопа в процессе регулярной прецессии можно определить угловую скорость вращения ротора.

Регулярная прецессия вокруг вертикальной оси приводит к возникновению сил трения в осях подвеса гироскопа, что в свою очередь приводит к появлению ещё одной прецессии — медленному опусканию оси гироскопа (повороту с угловой скоростью $\Omega_{\text{тр}}$). В работе предлагается по угловой скорости опускания измерить момент соответствующей силы трения согласно (8), а по направлению этой прецессии определить, где именно она приложена.

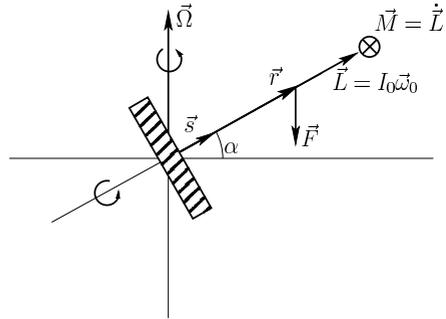


Рис. 2. Прецессия под действием веса груза $\vec{F} = m\vec{g}$

Экспериментальная установка. Для закрепления гироскопа в его центре масс (уравновешенный гироскоп) в данной работе используется *карданов подвес*, показанный на рис. 3. Наружное кольцо подвеса А может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси *aa*. Внутреннее кольцо Б связано с кольцом А горизонтальной осью *bb*. В кольце Б укреплен гироскоп, ось вращения которого *вв* перпендикулярна к оси *bb*. Центр масс гироскопа находится на пересечении всех трех осей и при любом повороте колец сохраняет свое положение в пространстве.

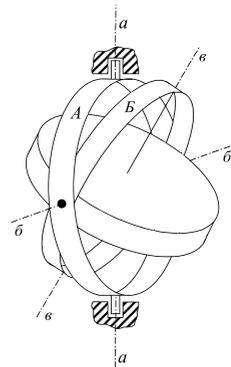


Рис. 3. Гироскоп в кардановом подвесе

Экспериментальная установка для исследования прецессии уравновешенного гироскопа показана на рис. 4. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М, питающегося током частотой 400 Гц. Кожух мотора (статор, имеющий обмотки, питаемые током частотой 400 Гц) скреплен с кольцом Б. Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси *bb*, которое может вращаться вокруг вертикальной оси *aa*. Ротор электромотора представляет массивный стальной цилиндр с прожилками меди, образующими «беличье

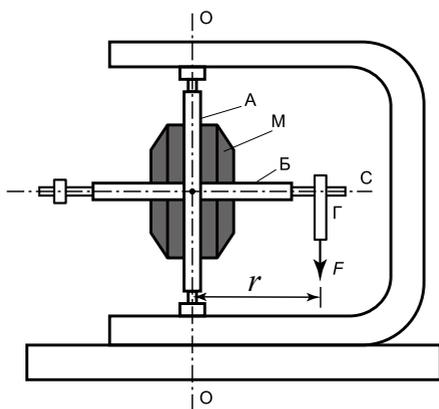


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

колесо». Обозначенный на рис. 4 буквой С рычаг направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г. Подвешивая различные грузы, можно изменять силу F , момент которой определяется расстоянием r от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А (до центра масс гироскопа), указанным на самой установке.

Заметим, что момент сил трения, возникающих в оси ротора гироскопа, компенсируется моментом сил, который создаёт электродвигатель, а потому их наличие не влияет на уравнения (1) и (8) (но это, конечно же, только пока ротор раскручен до максимальной скорости и вращается достаточно быстро, так что справедливо приближение (4)).

Ход работы. В работе исследуется зависимость угловой скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа (к рычагу С) подвешиваются грузы Г. Угловая скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и интервалом времени, за который это число оборотов совершено. Время определяется по секундомеру. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует приподнять на $5-6^\circ$. Опыт надо закончить, когда рычаг опустится примерно на такой же угол.

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчёт производится по формуле (10).

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора гироскопа, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жёсткой проволоке. При помощи той же проволоки измеряют период крутильных колебаний цилиндра правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко

можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа воспользуемся тем, что момент инерции пропорционален квадрату периода малых крутильных колебаний (*докажите*):

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (11)$$

здесь $T_{\text{ц}}$ — период крутильных колебаний цилиндра, T_0 — период крутильных колебаний ротора гироскопа.

ЗАДАНИЕ

1. Установите ось гироскопа в горизонтальное положение, включите питание гироскопа. Через 10–20 секунд, пока ротор гироскопа раскручен не слишком быстро, выключите питание и слегка толкните карандашом ось гироскопа. Опишите наблюдаемое движение.
2. Включите питание гироскопа и подождите 4–5 минут, чтобы вращение ротора успело стабилизироваться. Убедитесь в том, что ротор вращается достаточно быстро: при легком постукивании по рычагу С последний не должен изменять своего положения в пространстве. Объясните причину устойчивости оси гироскопа.
3. «Поиграйте» с гироскопом, нажимая карандашом на рычаг С. Как движется гироскоп при нажатии на рычаг? Ваши наблюдения и ответы на вопросы запишите в рабочую тетрадь.
4. По реакции гироскопа определите, в какую сторону вращается ротор. Ответ проиллюстрируйте чертежом, на котором указаны направления векторов \vec{s} , \vec{L} , $\vec{\omega}_0$, $\vec{\Omega}$, \vec{F} и \vec{M} .
5. Подвесьте к рычагу С груз Г. При этом должна начаться прецессия гироскопа. Трение в оси (в какой именно?) приводит к тому, что рычаг С начинает медленно опускаться. Ваши наблюдения и ответ на вопрос запишите в рабочую тетрадь.
6. Отклоните рычаг С вверх примерно на 1 см от горизонтальной плоскости. Измерьте расстояние от поверхности стола до конца рычага при помощи линейки. Подвесьте к нему груз Г и после начала прецессии определите число оборотов и время прецессии с помощью секундомера. Измерения продолжайте до тех пор, пока рычаг С не опустится примерно на 1 см ниже горизонтальной плоскости, сделав целое число оборотов относительно вертикальной оси. В конце измерения снимите груз Г и с помощью линейки измерьте высоту опускания рычага.
7. Проведите всю серию экспериментов, описанных в пункте 6, при 6–8 значениях момента M силы тяжести грузов относительно центра масс гироскопа (длина плеча r указана на установке).

8. Измерьте момент инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии I_0 . Для этого подвесьте ротор, извлечённый из такого же гироскопа, к концу вертикально висящей проволоки так, чтобы ось симметрии гироскопа была вертикальна, и измерьте период крутильных колебаний получившегося маятника. Замените ротор гироскопа цилиндром, для которого известны или легко могут быть измерены радиус и масса, и определите для него период крутильных колебаний. Пользуясь формулой (11), вычислите момент инерции ротора гироскопа I_0 .

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

9. По числу оборотов и времени прецессии, измеренным в пунктах 6–7, рассчитайте угловую скорость прецессии Ω для каждого опыта.
10. Оцените погрешности в определении I_0 и Ω . При оценке следует выделить погрешность измерения, которое вносит наибольший вклад в конечный результат: погрешность в измерении времени оборота при прецессии, периода крутильных колебаний ротора, геометрических размеров эталонного цилиндра и т. д.
11. Результаты опытов пп. 6–7 изобразите в виде графика угловой скорости прецессии Ω в зависимости момента внешней силы M . Используя формулу (10) и полученный график, определите угловую частоту вращения ротора гироскопа ω_0 .
12. По построенному графику оцените погрешность измерения ω_0 .
13. По данным из пп. 6–7 рассчитайте угловую скорость $\Omega_{\text{тр}}$ опускания рычага С во время прецессии и с помощью (8) определите момент сил трения $M_{\text{тр}}$. Зависит ли $M_{\text{тр}}$ от $\Omega_{\text{тр}}$?
14. Убедитесь в применимости соотношения (4) в данной работе.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент сил, момент импульса, момент инерции?
2. Что такое гироскоп? Каковы основные свойства динамики уравновешенного симметричного гироскопа?
3. Как связаны вектор угловой скорости и момент импульса тела? В чём заключается основное гироскопическое приближение?
4. Что такое регулярная прецессия?
5. Чем определяется скорость и направление вынужденной регулярной прецессии гироскопа?
6. Ось гироскопа расположили вертикально и оставили его включённым на 3 часа. Как изменится положение оси за это время, если лаборатория находится а) на экваторе, б) на широте Долгопрудного ($\varphi \approx 56^\circ$)?

7. Докажите, что если приложить силу \vec{F} к оси гироскопа, то в результате вектор угловой скорости прецессии $\vec{\Omega}$ будет коллинеарен \vec{F} .
8. *Решите задачу:* груз Γ массой 10 г уронили на рычаг С гироскопа (рис. 2, параметры гироскопа те же, что в вашей экспериментальной установке) с высоты 10 см, и груз упруго отскочил от него. На какой угол в результате повернётся ось гироскопа?
9. Чем объяснить, что монета, катящаяся по полу, поворачивает в ту сторону, в которую она наклонена?
10. *Покажите, что угловая скорость свободной прецессии вращающейся монеты в два раза больше её собственной скорости вращения.

Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. VII, §§ 49–51.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 65–67.
3. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 99–104.
4. *Лабораторный практикум по общей физике.* Т. 1. Механика / под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004. — С. 160.

Работа 1.5. Изучение колебаний струны

Цель работы: В работе исследуются условия образования стоячих волн в закреплённой с двух концов натянутой струне. Снимается зависимость частоты колебаний стоячих волн различных конфигураций от величины натяжения струны. Определяется скорость распространения поперечной волны в натянутой струне.

В работе используются: рейка со струной, звуковой генератор, постоянный магнит, разновесы.

Основное свойство струны — гибкость — является следствием ее большой длины по сравнению с поперечными размерами. Даже струны, изготовленные из жестких материалов, практически не сопротивляются изгибу, если размер изгибаемого участка значительно больше поперечного размера струны. Горизонтально расположенная струна с закрепленными концами провисает в поле тяжести, если она плохо натянута. При увеличении натяжения струна вытягивается практически в прямую линию. Сила натяжения при этом значительно превосходит вес струны.

Натянутая струна с жестко закрепленными концами удобна для изучения колебательных процессов. Это связано с тем, что в струне можно непосредственно наблюдать простейшие типы колебаний и волн, измерять их параметры и сравнивать результаты наблюдения с результатами теоретических расчетов.

Движение элементов струны в поперечном направлении может быть вызвано изменением ее формы или передачей ей импульса. Натяжение струны стремится вернуть её в начальное прямолинейное положение, и это приводит к тому, что возникает движение элементов струны. Возмущения бегут вдоль струны.

Скорость распространения поперечной бегущей волны малой амплитуды на натянутой струне или резиновом жгуте зависит от погонной **плотности** ρ_l (т.е. массы единицы длины) и **силы натяжения** F :

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}. \quad (1)$$

На границе раздела двух сред с разными механическими свойствами волна частично отражается, а частично проникает во вторую среду. Волна, бегущая по струне или резиновому жгуту, отражается от закреплённого конца; при этом появляется отражённая волна, бегущая во

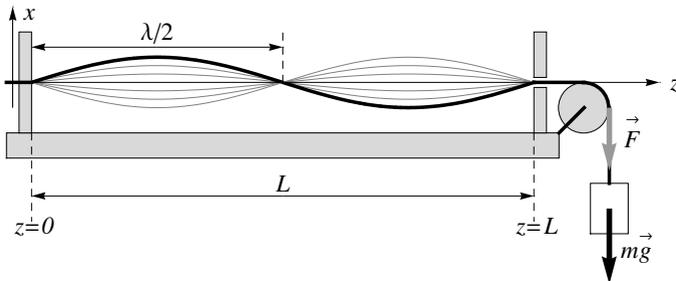


Рис. 1. Образование стоячей волны в натянутой струне

встречном направлении. В струне, закреплённой с обоих концов, возникают сложные колебания $x(z, t)$ — смещение элемента струны, находящегося в точке с координатой z , относительно равновесного положения в зависимости от времени t . Такие колебания можно рассматривать как результат сложения (суперпозиции) двух волн $x_1(t, z)$ и $x_2(t, z)$, распространяющихся в противоположных направлениях $x(t, z) = x_1(t, z) + x_2(t, z)$. Если волны, бегущие по струне во встречных направлениях, имеют синусоидальную форму, то при определённых условиях они образуют стоячую волну.

Стоячие волны. Пусть струна длиной L закреплена так, что один из её концов закреплён в точке $z = 0$, а другой — в точке $z = L$ (рис. 1).

В струне создано натяжение F и возбуждены синусоидальные волны небольшой амплитуды. По струне одновременно распространяются в противоположных направлениях две волны одинаковой частоты и амплитуды:

$x_1(t, z) = A \cos(\omega t - kz)$ — волна, бегущая в положительном направлении оси z (слева направо);

$x_2(t, z) = -A \cos(\omega t + kz)$ — волна, бегущая в отрицательном направлении оси z (справа налево).

(Напомним, что $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота, а $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. В этих обозначениях фазовая скорость волны очевидно равна $u = \omega/k$; ν — частота колебаний струны, λ — длина волны.)

В точке $z = 0$ волна x_1 порождается в результате отражения волны x_2 . При отражении от неподвижного закреплённого конца отражённая волна оказывается в противофазе с падающей. Согласно принципу суперпозиции, колебания частиц, вызванные встречными волнами в каждой точке струны, складываются. Таким образом, результирующее колебание в каждой точке равно сумме колебаний, вызванных волнами x_1

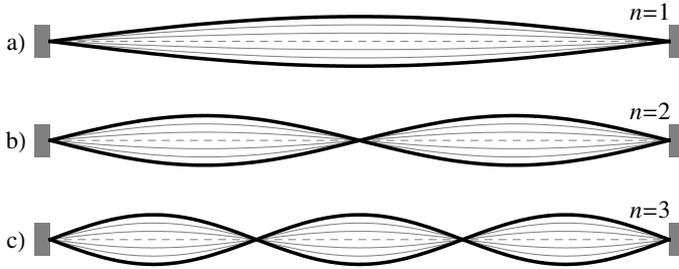


Рис. 2. Конфигурации стоячих волн на закреплённой струне

и x_2 :

$$x(t, z) = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t - kz) - A \cos(\omega t + kz) = 2A \sin(kz) \sin(\omega t).$$

Это и есть уравнение стоячей волны. Эта формула показывает, что каждая точка струны совершает гармоническое колебание с частотой ω . Амплитуда для разных точек различна и зависит от координаты по следующему закону: $a(z) = 2A |\sin(kz)|$. Точки, в которых амплитуда колебаний струны максимальна, называются пучностями стоячей волны. Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами. Из формулы видно, что узлы находятся в точках, где $\sin(kz) = 0$, т.е.

$$kz = n\pi (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Характер колебаний точек в стоячей волне показан на рис. 1. Расстояние между двумя соседними пучностями (или узлами) составляет половину длины бегущей волны, т.е. $\lambda/2$.

Граничные условия для закреплённой струны. На закреплённых концах струна неподвижна — там находятся узлы, поэтому в такой струне возможны только такие стоячие волны, когда на длине струны L укладывается целое число полувольт. Возможные длины волн находятся из условия $n\lambda_n/2 = L$, или $\lambda_n = 2L/n$. Отсюда получается формула для частот собственных колебаний струны $\nu_n = u/\lambda_n = nu/(2L)$. На рис. 2 показаны возможные конфигурации стоячих волн на закреплённой с двух концов струне.

Вывод волнового уравнения для бегущих по натянутой струне поперечных волн. Выражение для скорости поперечной бегущей волны получается из волнового уравнения, которое в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$

Покажем, что распространение поперечной волны по натянутой струне подчиняется волновому уравнению. Запишем второй закон Ньютона для небольшого кусочка

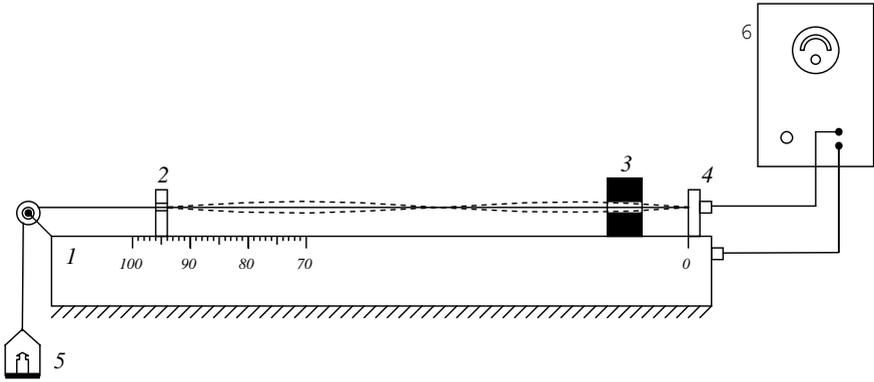


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

струны ($z, z + \Delta z$) в проекции на ось x (рис. 1):

$$\rho_l \Delta z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -F(z) \sin \alpha(z) + F(z + \Delta z) \sin(z + \Delta z),$$

где $F(z)$ — натяжение в точке z , $\alpha(z)$ — угол между касательной к струне в точке z и осью z . Очевидно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial x}{\partial z}$. Если смещения $x(z, t)$ малы, то можно пренебречь отличием натяжения струны в волне от её натяжения в равновесном состоянии, а также считать, что $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$. В этом приближении уравнение движения элемента струны Δz приобретает вид

$$\rho_l \Delta z \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -F \left[\frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} + \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_z \right].$$

Разделив обе части уравнения на Δz в пределе $\Delta z \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_l} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Это волновое уравнение для поперечных волн малой амплитуды в натянутой струне. Согласно этому уравнению такие волны распространяются со скоростью $u = \sqrt{F/\rho_l}$. Общее решение этого волнового уравнения имеет вид: $x(z, t) = x_1(z - ut) + x_2(z + ut)$, где x_1 и x_2 — произвольные функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных условий.

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 3. На массивной металлической рейке 1 установлены опора 2 и магнит 3, которые можно перемещать вдоль рейки, а также неподвижная опора 4. Один конец струны закреплен в изоляторе опоры 4. От него струна проходит между полюсами магнита и через опору 2, которая дает возможность струне перемещаться в горизонтальном направлении, неподвижный блок и соединяется с чашкой 5, на которую помещают грузы. Такое устройство нужно для создания необходимого натяжения струны. К концу струны, закрепленному

в изоляторе опоры 4, и к массивной металлической рейке 1 подводится переменное напряжение от звукового генератора 6 (так называют генератор электрических колебаний «звуковой» частоты — от нескольких герц до десятков килогерц). Движение струны вызывается силой Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле. Частота действия силы, раскачивающей струну, равна частоте колебаний тока в струне, то есть частоте генератора.

В натянутой струне возникнут колебания и по ней побегут волны, которые отразятся от опор 2 и 4 и, сложившись друг с другом, создадут стоячую волну, если на длине струны уложится целое число полуволн.

В реальных условиях колебания струны существуют потери энергии, связанные с трением струны о воздух, передачей некоторого движения опорам, необратимыми процессами в самой струне и, возможно, какими-то другими процессами. Чтобы колебания струны происходили долго, нужно подводить энергию. В стационарном режиме подводимая энергия равна потерям энергии. В данной установке сила Ампера не только возбуждает, но и поддерживает колебания в струне.

Необходимо сделать одно замечание. Действие силы Ампера должно привести к поляризованным волнам, плоскость колебания которых перпендикулярна направлению магнитного поля. В реальных условиях на установке не всегда получают линейно поляризованные волны.

ЗАДАНИЕ

1. Изучите конструкцию установки. Установите опору 2 (рис. 3) так, чтобы колеблющийся участок струны имел длину L не менее 80 см.
2. Включите питание звукового генератора. Дайте ему прогреться 5–10 минут.
3. Нагрузите струну. При фиксации струны опорой 2 не затягивайте её — эта опора должна ограничивать распространение волн, но не препятствовать передаче натяжения от чашки с грузами 5.
4. Перемещая магнит и вращая ручку изменения частоты генератора, получите картину стоячих волн. (Передвижение магнита вдоль струны перемещает точку приложения внешней силы, которая не должна попадать на узел, но должна быть к нему достаточно близка). Если узлы стоячей волны получаются сильно размытыми, то следует уменьшить выходную мощность звукового генератора.
5. Увеличивая частоту звукового генератора при некотором постоянном натяжении струны, получите стоячие волны, соответствующие $n = 1, 2, 3, \dots$, дойдя, по крайней мере, до $n = 6$. Фиксируя каждый раз показания лимба звукового генератора, повторите процесс при понижении,

а затем снова при повышении частоты. Проведите эти измерения при различных натяжениях струны (не менее пяти).

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

- Для каждого значения натяжения струны F постройте график зависимости частоты резонанса ν_n от n . По наклону прямой с помощью формулы (2) определите скорость u волн в струне при данном натяжении. Оцените погрешность результатов.
- Постройте график зависимости u^2 от F . По наклону прямой с помощью формулы (1) определите погонную плотность струны ρ_l . Оцените погрешность результата и сравните вашу оценку с действительной погрешностью. Истинное значение ρ_l указано на установке.

Контрольные вопросы

- Как связаны между собой частота, длина волны и скорость распространения бегущей волны?
- Что такое продольные и поперечные волны? Поперечные или продольные волны распространяются по струне? Звуковая волна, распространяющаяся в газе, воде, — продольная или поперечная?
- Напишите уравнение гармонически бегущей волны и убедитесь, что оно является решением волнового уравнения $\partial^2 x / \partial t^2 = u^2 \partial^2 x / \partial z^2$. Как выглядит решение волнового уравнения в общем виде?
- Используя метод размерности, покажите, что скорость распространения поперечных волн по струне должна иметь вид $u \sim \sqrt{F/\rho_l}$. Рассчитайте по этой формуле скорость волн в вашем эксперименте.
- Решите задачу:* По десятиметровому канату, прикрепленному к потолку спортзала, в районе нижнего его конца нанесли резкий удар палкой. Оцените время, через которое импульс достигнет потолка спортзала.
- Методом размерности получите (с точностью до числового коэффициента) формулы для скорости распространения продольных волн в газе, жидкости, металлическом стержне с модулем Юнга E . Сделайте оценки значений скоростей звуковых волн в воздухе, воде, алюминии и сравните полученные вами оценки с табличными значениями.
- Как образуется стоячая волна?
- Как происходит отражение бегущей волны от жестко закрепленного конца струны и от конца, который может свободно двигаться в направлении, перпендикулярном к направлению натяжения струны? Как изменяется фаза отраженной волны при отражении от закрепленного и свободного конца? Подумайте, каким образом можно создать натяжение в струне со свободным концом?
- Получите уравнение стоячей волны. Дайте определение пучности и узла стоячей волны.

10. Как определить частоты, на которых возможны собственные колебания струны, закреплённой на концах? Во сколько раз необходимо увеличить натяжение струны, чтобы частота её собственных колебаний удвоилась?
11. Как должна изменяться погонная плотность струн на шестиструнной гитаре, если известно, что натяжение всех струн гитары в настроенном состоянии одинаково?
12. Как изменяется фаза колебаний в стоячей волне? Нарисуйте распределение фазы колебаний в стоячей волне на закреплённой с двух сторон струне, если на длине струны укладывается $n = 1, 2, 3$ полуволн.

Литература

1. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. С. 137–143.
2. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. С. 150–154.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 81, 84.
4. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III. Гл. 5. § 5.6.
5. *Лабораторный практикум по общей физике.* Т. 1. Механика / под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004. — С. 270.

Работа 1.6. Определение модуля Юнга на основе исследования деформации растяжения

Цель работы: экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для одноосного растяжения; по результатам измерений вычислить модуль Юнга.

В работе используются: прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка или линейка.

Деформации и внутренние напряжения в деформируемом твёрдом теле. Рассмотрим покоящееся твёрдое тело, которое не является абсолютно твёрдым и может деформироваться, т. е. изменять свою форму и объём под действием приложенных сил. Такие изменения называются деформациями. Деформации считаются *упругими*, если они исчезают после прекращения действия приложенных сил. В результате деформирования в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в первоначальное состояние. Внутренние силы обусловлены молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом.

Рассмотрим однородный стержень (проволоку), к основаниям которого приложены растягивающие силы (см. рис. 1). Возникающая при этом деформация стержня связана с появлением упругих сил, с которыми каждая часть стержня действует на другую, с которой она граничит. Сила, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, называется *напряжением*. В рассматриваемом случае напряжение перпендикулярно к поперечному сечению стержня и называется *натяжением*

$$T = \frac{F}{S},$$



Рис. 1

где S — площадь поперечного сечения стержня. Пусть l_0 — длина недеформированного стержня. После приложения силы F его длина получает приращение Δl и делается равной $l = l_0 + \Delta l$. Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

называется *относительным удлинением* стержня.

Опыт показывает, что для не слишком больших упругих деформаций натяжение пропорционально относительному удлинению

$$T = E \frac{\Delta l}{l_0} = E\varepsilon, \quad (1)$$

где E — *модуль Юнга* — постоянная, зависящая только от материала стержня и его физического состояния. Формула (1) выражает *закон Гука*. Если ввести коэффициент упругости стержня

$$k = E \frac{S}{l_0}, \quad (2)$$

то закон Гука можно записать в виде: $F = k \cdot \Delta l$.

Для того чтобы деформировать тело, над ним надо совершить работу. В свою очередь деформированное тело само может совершать работу, т. е. обладает запасом потенциальной энергии. Она равна работе сил, затраченной на деформацию тела, при условии, что вся эта работа тратится только на приращение упругой энергии тела. Для этого необходимо производить деформацию достаточно медленно, постепенно увеличивая внешние силы, чтобы в каждый момент времени каждая часть тела практически находилась в состоянии равновесия, т. е. квазистатически.

Если приложенная к стержню растягивающая сила f непрерывно и медленно увеличивается от начального значения $f = 0$ до конечного значения $f = F$, при котором удлинение стержня равно Δl , то величина запасённой в стержне упругой энергии

$$U = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2. \quad (3)$$

Для *объёмной плотности упругой энергии*, т. е. упругой энергии, приходящейся на единицу объёма растянутого стержня, получаем

$$w = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} T\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2. \quad (4)$$

Под действием на стержень силы F изменяется не только его продольный размер (длина), но и поперечный размер (для проволоки круглого сечения — диаметр). Если сила F — растягивающая, то поперечные размеры стержня уменьшаются. Пусть диаметр стержня до деформации d_0 , а после деформации — d . Относительной поперечной деформацией стержня называется величина

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d_0},$$

где $\Delta d = d - d_0$, причём $\varepsilon_{\perp} < 0$, т.е. имеет место сжатие. Коэффициентом Пуассона называется отношение относительного поперечного сжатия к соответствующему относительному продольному удлинению $\varepsilon_{\parallel} = \Delta l/l_0$:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} = -\frac{\Delta d}{d_0} : \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (5)$$

Коэффициент Пуассона зависит только от материала стержня, а его максимальное значение равно $1/2$ (это значение соответствует сохранению объёма тела при малых деформациях; при растяжении проволоки, проводимом в данной работе, её объём увеличивается; типичное значение коэффициента для металлов $\mu \sim 0,3$). Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства *изотропного* материала.

Если тело подвергается сжатию или растяжению сразу по трём взаимно перпендикулярным осям (см. рис. 2), то нетрудно установить связь между приложенными натяжениями T_x, T_y и T_z и соответствующими относительными деформациями $\varepsilon_x = \Delta x/x_0$, $\varepsilon_y = \Delta y/y_0$, $\varepsilon_z = \Delta z/z_0$. Рассмотрим по отдельности влияние каждого из напряжений на деформацию по оси x : во-первых, она возникает из-за наличия натяжения по x , которое согласно (1) приводит к деформации T_x/E , а во-вторых, благодаря наличию напряжений в поперечном направлении возникает «пуассоновская» деформация: наличие T_y добавляет к ε_x согласно формуле (5) величину $-\mu T_y/E$, а из-за T_z добавляется $-\mu T_z/E$. Бесконечно малые деформации подчиняются принципу суперпозиции, а поэтому для получения результирующей деформации надо просто сложить три полученных слагаемых:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}T_x - \mu \frac{1}{E}(T_y + T_z). \quad (6)$$

Аналогично для трёх остальных осей:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}T_y - \mu \frac{1}{E}(T_x + T_z), \quad (7)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}T_z - \mu \frac{1}{E}(T_x + T_y). \quad (8)$$

Например, если сжимать тело одинаково со всех сторон с давлением P , то $T_x = T_y = T_z = -P$. Тогда из (6) получаем $\varepsilon_x = \frac{1}{E}P(2\mu - 1)$, откуда видно происхождение ограничения на коэффициент Пуассона $\mu < 1/2$ — при попытке сжать тело, его размеры должны уменьшаться, то есть $\varepsilon_x < 0$.

При растяжении исследуемой в работе проволоки напряжение приложено только по одной оси — вдоль проволоки (например, $T = T_x$). К боковым же поверхностям никаких внешних сил не приложено, а значит, поперечное натяжение равно нулю $T_y = T_z = 0$. Тогда из (6)–(8) обратно получаем формулы (1) и (5) — наличие

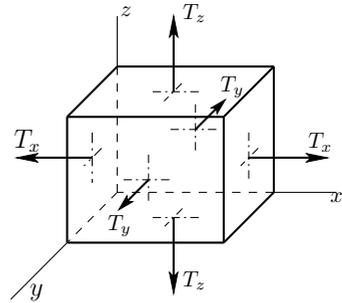


Рис. 2. Деформация бруска

коэффициента Пуассона приводит к поперечной деформации, но никак не влияет на продольную.

Экспериментальная установка. В работе производят растяжение проволоки. Для малых упругих деформаций формула (1) позволяет рассчитать значение модуля Юнга материала проволоки по результатам измерений растягивающей силы и соответствующего этой силе удлинения проволоки.

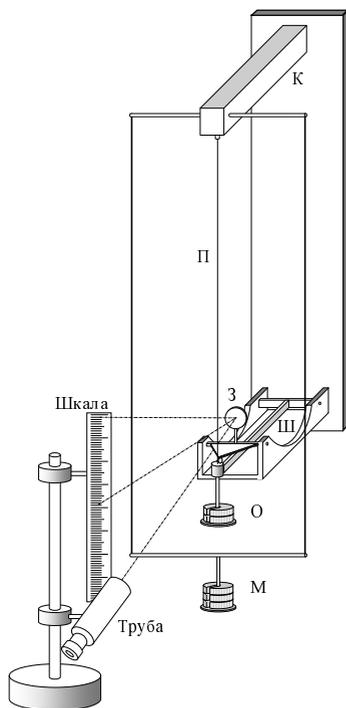


Рис. 3. Прибор Лермантова

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермантова, схема которого изображена на рис. 3. Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплён к консоли К, а нижний — к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг Р (на рисунке не обозначен), связанный с зеркальцем З. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркальца. Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с площадки М на площадку О и наоборот. Такая система позволяет исключить влияние деформации кронштейна К на точность измерений, так как нагрузка на нем все время остаётся постоянной. При проведении эксперимента следует иметь в виду, что проволока П при отсутствии нагрузки всегда несколько изогнута, что не может не сказаться на результатах, особенно при небольших нагрузках. Проволока вначале не столько растягивается, сколько распрямляется.

ЗАДАНИЕ

1. Определите площадь поперечного сечения проволоки. Для этого измерьте её диаметр микрометром не менее чем в десяти местах и во взаимно перпендикулярных направлениях в каждом месте. При измерении следите, чтобы микрометр не деформировал проволоку. В дальнейших расчётах надо пользоваться средним значением диаметра, вычисленным по всем измерениям.

2. Измерьте длину проволоки.
3. Направьте зрительную трубу на зеркальце З. При этом в трубу должно быть чётко видно отражение шкалы в зеркальце. Формулу, связывающую число делений по шкале n , расстояние h от шкалы до зеркальца, длину рычага r и удлинение проволоки Δl , выведите самостоятельно. Длина рычага r указана на приборе, а расстояние h следует измерить.
4. Необходимо позаботиться о том, чтобы в процессе эксперимента не выйти за пределы области, где удлинение проволоки пропорционально её натяжению (область пропорциональности). Для этого прежде всего оцените максимальную величину нагрузки, приняв, что разрушающее напряжение равно 900 Н/мм^2 . Рабочее напряжение не должно превышать 30% от величины разрушающего.
5. Проверьте правильность сделанной оценки. Для этого нагрузите проволоку одним из имеющихся грузов, затем уберите его и посмотрите, вернулась ли длина проволоки к первоначальному значению. Повторите этот эксперимент с двумя, тремя и т. д. грузами, постепенно доходя до расчётной нагрузки. Если остаточные деформации станут заметными, дальнейшее увеличение нагрузки следует прекратить. При изменении нагрузки на проволоке каждый раз необходимо предварительно арретировать прибор (на рис. 3 арретир не показан — он представляет из себя винт, блокирующий отклонение шарнира Ш и рычага Р).
6. Снимите зависимость удлинения проволоки, измеренную по числу делений по шкале, от совокупной массы грузов. Для исключения возможных систематических ошибок нагрузку сначала следует увеличивать, подкладывая новые грузы, а затем уменьшать, убирая их по одному. Повторите этот эксперимент 2–3 раза.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

7. По полученным результатам постройте график зависимости удлинения проволоки Δl от нагрузки $P = mg$ (g — ускорение свободного падения). В недеформированном состоянии проволока, как правило, изогнута, и при малых нагрузках её «удлинение» определяется не растяжением, а выпрямлением. Поэтому на начальном участке зависимости $\Delta l(P)$ (при малых P) удлинение растёт довольно быстро, и только затем точки начинают ложиться на прямую, не проходящую, однако, через начало координат. По наклону этой прямой можно определить жёсткость проволоки k , а по ней — модуль Юнга E . Начальный участок зависимости $\Delta l(P)$ из обработки следует исключить.
8. По найденной графически жёсткости k проволоки определите модуль Юнга E .

9. Оцените погрешности определения k и E . При оценке погрешности E следует учитывать погрешности определения диаметра проволоки и её длины.
10. Определите материал проволоки, сравнивая полученное значение модуля Юнга с табличными значениями.

Контрольные вопросы

1. Какие основные источники погрешностей измерений? Каким образом можно уменьшить погрешности?
2. Оцените максимальную точность, с которой при данных условиях целесообразно измерять удлинение проволоки.
3. При каких напряжениях и относительных деформациях выполняется закон Гука?
4. Какие отклонения от закона Гука возможны при деформировании твердых тел?
5. Что такое коэффициент Пуассона?
6. Используя табличное значение коэффициента Пуассона материала проволоки на вашей экспериментальной установке, оцените изменение диаметра проволоки для максимальной нагрузки.
7. Оцените изменение объёма проволоки для максимального значения использованной вами нагрузки.
8. Докажите, что значение коэффициента Пуассона 0,5 соответствует сохранению объёма при растяжении проволоки.
9. Для одного из значений нагрузки оцените плотность упругой энергии и величину упругой энергии, запасенной в деформированной проволоке.
10. Оцените скорость продольных звуковых волн в материале проволоки.
11. Для чего в приборе Лермантова нужна площадка M ?

Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 75–80.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8. §§ 8.1, 8.2.
3. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 81, 82, 87, 88.
4. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. §§ 105–108.
5. *Лабораторный практикум по общей физике.* Т. 1. Механика / под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004. — С. 183.

Содержание

Работа 1.1. Определение скорости полета пули при помощи баллистического маятника	4
Работа 1.2. Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса	10
Работа 1.3. Изучение колебаний на примере физического маятника	18
Работа 1.4. Исследование вынужденной прецессии гироскопа	25
Работа 1.5. Изучение колебаний струны	35
Работа 1.6. Определение модуля Юнга на основе исследования деформации растяжения	42

МОДЕЛИ И КОНЦЕПЦИИ ФИЗИКИ: МЕХАНИКА ЛАБОРАТОНЫЙ ПРАКТИКУМ

Составители:

Гладуш Михаил Геннадьевич

Гуденко Алексей Викторович

Извекова Юлия Николаевна

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

Максимычев Александр Витальевич

Попов Павел Владимирович

Филатов Юрий Николаевич

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *Л. В. Себова*

Подписано в печать 15.12.2011. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,9. Тираж 100 экз. Заказ № 138.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9