Что такое геометрия Финслера и почему ее нужно понимать физикам

В. Г. Жотиков
zhotikov@yandex.ru

Московский физико-технический институт

Лекция для преподавателей физики ВУЗОВ России

12.10.2012

План лекции

Общие соображения и мотивации

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Об устойчивости физических структур

Заключение

Общие соображения и мотивации

В последнее время в физической литературе наметился серьезный интерес к идеям и методам геометрии Финслера и их приложениям к проблемам современной физики от квантовой гравитации и физики микромира до астрофизики и космологии.

Это представляется не случайным. Мы видим в этом начало осознания необходимости перехода к новой парадигме физики.

Здесь, несомненно, напрашивается известная аналогия с введением в физику геометрии Римана. Последняя была сформулирована в 1864 году Р. Риманом (1826 – 1866) , тогда, как оказалась востребованной в физической науке почти через полвека, в связи с созданием общей теории относительности (А. Эйнштейн и М. Грассман (1916)).

Общие соображения и мотивации

Сам создатель теории относительности хорошо понимал, что созданное им не есть истина в последней инстанции и не может быть справедливым для масштабов микромира. Он писал:

«Защищаемое здесь истолкование Геометрии нельзя непосредственно применять к субмолекулярным (меньшим чем молекулы) пространствам... может оказаться, что такое экстраполирование столь же неправильно, как и распространение понятия температуры на частицы тела молекулярных размеров»[1].

[1] *Эйнштейн А.* Геометрия и опыт. (1921) Собрание научных трудов. М.: Наука, Т. 2. С. 83.

Общие соображения и мотивации

Почему геометрия Финслера?

Геометрия Финслера имеет дело с неточечными объектами.
Риманова геометрия есть частный случай финслеровой геометрии.
В геометрии Финслера Принцип относительности (ПО) выполняется автоматически.

<u>1. Общий принцип относительности $\Longrightarrow$(ОТО):</u>
«Все законы природы независимы от выбора (совершенно произвольного) систем отсчета».
<u>2. Специальный принцип относительности $\Longrightarrow$ (СТО)</u>
«Все физические процессы в инерциальных системах отсчета (ИСО) протекают одинаково»
+ 2-й постулат (постоянство скорости света).
В финслеровой геометрии 2-й постулат СТО становится избыточным.

Общие соображения и мотивации

О применении идей и методов геометрии Финслера в современной физике

1. Д. И. Блохинцев *Геометрия и физика микромира.* УФН, Том 110 (вып. 4), 1973. С. 481.
«Можно полагать, что и в случае микромира метрика пространства-времени может быть продиктована полем элементарных частиц».

2. Д. А. Киржниц, В. А. Чечин *Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории.* ЯФ, Том 15 (вып. 7), 1972. С. 1051.
«Расхождение между теорией и экспериментом наметившееся в физике космических лучей может быть отнесено за счет нарушения релятивистской динамики в области больших энергий и скоростей».

О многообразии геометрии

Начнем с терминологии.
Уже в девятнадцатом столетии математики пришли к мысли о том, что существует не одна, а много геометрий.

В общеупотребительном в настоящее время смысле, геометрия есть теория пространства,
а **пространство** есть система объектов, называемых обычно «точками», вместе с системой соотношений, которыми эти точки связаны, причем, эта система соотношений до некоторой степени аналогична тем, или иным соотношениям между элементами физического пространства.
Пространство, следовательно, есть не просто абстрактное множество объектов, но и множество объектов с определенной системой свойств и отношений.

О многообразии геометрии

Например, структура так называемого *метрического пространства* определяется некоторой функцией $\triangle(P, Q)$, аргумент которой есть пара «точек», и значения которой — некоторые числа.
$\triangle(P, Q)$ называется *расстоянием* между «точками» P, Q.

Часто встречающиеся в литературе названия:
геометрия Лобачевского – «гиперболическая»,
геометрия Римана – «эллиптическая»,
а евклидовой геометрии – «параболическая»
принадлежат Ф. Клейну (1849 – 1925).
Всемирную славу Ф. Клейну принесла его знаменитая «Эрлангенская программа». Он изложил ее в 1872 году в своей лекции при вступлении в должность профессора математики университета г. Эрланген (Германия).

О многообразии геометрии

В указанной лекции Ф. Клейн сформулировал единую точку зрения на геометрию как на теорию инвариантов соответствующей группы преобразований.

Название геометрии как правило совпадает с названием группы преобразований, например:
евклидова, аффинная, эквиаффинная,
центрально-проективная, проективная и т. д.
Классификация групп преобразований дает классификацию геометрий, а теория инвариантов каждой группы дает аналитическую структуру соответствующей геометрии.
Соответствующие группы преобразований называют ***фундаментальными группами*** каждой из геометрий.

О многообразии геометрии

Центральная идея «Эрлагенской программы» Ф. Клейна связана с понятием группы.
То есть, такой совокупности преобразований, которая подчиняется следующим условиям:
1) произведение двух преобразований совокупности принадлежит той же совокупности;
2) преобразование, обратное любому преобразованию совокупности, принадлежит той же совокупности;
3) наличие тождественного преобразования.

Таким образом, Ф. Клейн пришел к расширенному пониманию геометрии, формулируя ее задачу следующим образом.
Дано многообразие и в нем группа преобразований.

О многообразии геометрии

Нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются при преобразованиях группы.
Из этого определения следует, что существуют различные геометрии. Они могут отличиться друг от друга характером элементов многообразия и строением группы. Последнее отличие является наиболее существенным.
Если геометрии различаются между собой по характеру элементов многообразия но их фундаментальные группы изоморфны[2], то каждому факту одной геометрии будет соответствовать факт другой. При этом, каждую из них можно изучать на основе другой.

[2] изоморфными называются группы, если между их преобразованиями можно установить взаимно однозначное соответствие

О многообразии геометрии

В качестве примеров геометрий, характеризуемых группами преобразований, Ф. Клейн назвал, кроме элементарной, или евклидовой геометрии, аффинную, неевклидовы геометрии пространств положительной и отрицательной кривизны и проективную геометрию. Последняя является наиболее общей: фундаментальные группы всех предыдущих геометрий изоморфны некоторым подгруппам проективной группы.
Геометрия разветвляется на отдельные виды в соответствии с той или иной группой преобразований.
Задача каждой геометрии состоит в изучении тех ее свойств, которые остаются инвариантными относительно соответствующей группы преобразований.
В этом состоит основная мысль Программы Ф. Клейна.
Так развивалась геометрия до середины XX-го века.

Общие соображения и мотивации

С указанной точки зрения, пространство-время СТО представляет собой 4-х мерное вещественное аффинное (более строго, эквиаффинное!) пространство $M^4 = R^4_1$ с невырожденной метрикой сигнатуры $(1, 3)$.

Пространство M^4 называется в физической литературе **пространством Минковского**.

Аффинные (линейные неоднородные преобразования) пространства M^4 определяют **группу Пуанкаре**.

Подгруппа однородных преобразований группы Пуанкаре носит название **группа Лоренца**.

Приходим, к центральной (экви-)аффинной геометрии.

Преобразования Лоренца (их называют бусты) не образуют группу преобразований.

Не путать термины релятивистская инвариантность и лоренц-инвариантность!.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Как связать квантовую физику с геометрией?

Кванты были ведены М. Планком в 1900 г. как наименьшие порции энергии излучателя.
М. Планк с самого начала ясно видел, что фундаментальной величиной является не квант энергии $h\nu$, а квант действия $h = 6,62 \cdot 10^{27}$ *эрг.сек*.
Он связывал это с **инвариантностью действия** относительно преобразований координат.
Количество действия изменяется дискретным образом как целое кратное величины h.
А. Зоммерфельд (1911): «Не h следует выводить из размеров атомов, а само существование атомов является функцией и следствием элементарного кванта действия» (квантовый постулат Бора-Зоммерфельда).

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уже давно было замечено, что все события совершаются в Природе так, что вариация некоторой величины S, которая называется ***действием*** физической системы, равняется нулю:

$$\delta S = 0. \tag{1}$$

По-существу, это и есть основной закон всей современной физики (см., например, В. Арнольд[3] и др.).
Все другие законы Природы, такие как закон всемирного тяготения, законы электромагнетизма, законы взаимодействия элементарных частиц и т. д. и т. п., следуют из него.

[3] *Арнольд В. И.* Математика и физика: родитель и дитя или сестры? УФН. Том 169, № 12 (1999)

О геометрической интерпретации принципа наименьшего действия

К геометрии Финслера (П. Финслер, 1918) мы приходим давая геометрическую интерпретацию принципа наименьшего действия [4]

$$s[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt. \qquad (2)$$

$L(q, \dot{q})$ – функция Лагранжа (лагранжиан) исследуемой системы; $q \equiv q^{\alpha} \in X^n$ — обобщенные координаты, $\dot{q} \equiv \dot{q}^{\alpha}$, $(\dot{q}^{\alpha} = \dfrac{dq^{\alpha}}{dt})$ – обобщенные скорости, $\alpha = 1, ..., n$. n – количество всех степеней свободы. Многообразие $X^n : P(q) = P(q) \in X^n$ называют геометрическим пространством Веблена-Уайтхеда.

[4] V. Zhotikov *Finsler geometry and the equations of the movement in the relativistic dynamics*. Proceedings of the XV International Scientific Meeting PIRT–2009. Moscow, 2009. P. 133 – 144

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Задача ставится следующим образом.
Необходимо построить геометрию, в которой каждой геометрической кривой γ выражение (2) ставит в соответствие определенное число $s = s[\gamma]$,
которое можно назвать *длиной дуги* кривой γ в некотором геометрическом пространстве X^n.
Экстремали функционала (2) (траектории, описываемые уравнениями Эйлера-Лагранжа) — суть *геодезические (кратчайшие)* этого пространства X^n.
Мерой измерения расстояний в этом пространстве является постоянная Планка h.
Эта задача и была решена П. Финслером (1894 – 1950)
в его дисссертации «Uber Kurven and Flachen in allgemeinen Raumen»: Dissertation. – Gottingen, (1918).

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Инвариантность интеграла действия (2) относительно преобразований общего вида

$$t \to t'(t);\ q^\alpha \to q^{\alpha\prime} = q^{\alpha\prime}(q^\alpha), (Det|\frac{\partial q^{\alpha\prime}}{\partial q^\alpha}| \neq 0) \qquad (3)$$

накладывают ограничения на структуру функции Лагранжа $L(q, \dot{q})$. Она должна быть:
1) положительно однородной первой степени относительно обобщенных скоростей;
2) неотрицательной $(L(q, \dot{q}) > 0)$ для $\dot{q} \neq 0)$;
3) квадратичная форма $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$ от переменных $\xi^\alpha \neq 0$ где $g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial\dot{q}^\beta}$ положительно определена.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Условия 1) — 3) дают классическое определение метрики Финслера. Условие однородности приводит нас к рассмотрению релятивистских лагранжианов (П. Дирак). Геометрическое пространство X^n с заданной в нем метрикой Финслера называется ***пространством Финслера*** и обозначается F^n. Уравнение[5]

$$L(q^\alpha, x^\alpha) = 1,\ x^\alpha \in T^n(P),\ P \in X^n \qquad (4)$$

в каждом касательном $T^n(P)$, $P \in X^n$ описывает некоторую локальную гиперповерхность. Ее называют ***поверхностью лагранжиана*** единичного действия или ***локальной индикатрисой*** метрики Финслера.

[5] Принята система единиц $h = c = 1$.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Индикатриса (см. **ФЭ**)
(от латинского слова **indico** — указываю, определяю) указательная поверхность, вспомогательная поверхность, характеризующая зависимость каких либо свойств среды от направления.
Для построения индикатрисы из одной точки (центра) проводят радиус-векторы, длина которых пропорциональна величине, характеризующей данное свойство среды в данном направлении. Например: **электропроводность, показатель преломления, модули упругости и т.д.**
Понятие ***локальная индикатриса*** метрики является одним из ключевых понятий в геометрической интерпретации принципа наименьшего действия.

О физическом смысле понятия индикатрисы метрики

Локальная индикатриса — гиперповерхность в каждом локальном касательном $T^n(P)$, $P \in X^n$ отвечающая единичной плотности действия.

Ее размерность равна $m = n - 1$.

Функция Лагранжа есть метрическая функция для пространства конфигураций X^n.

Каждому лагранжиану соответствует своя локальная индикатриса, определяющая метрику в пространстве X^n.

Задание локальной индикатрисы, т. е. некоторой поверхности единичного действия с самого начала обеспечивает введение всех необходимых процедур измерения физических величин решаемой задачи.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Общая теория относительности (ОТО) приобретает смысл, заложенный в ее названии, только когда она дополнена методом задания систем отсчета. Аналогичным образом, в сопряженном локальном касательном пространстве $T^{*n}(P)$, соответствующем $T^n(P)\, P \in X^n$ строится гиперповерхность (семейство гиперплоскостей)

$$H(q^\alpha, y_\alpha) = 1,\ \ y_\alpha \in T^{*n}(P),\ P \in X^n, \tag{5}$$

где H – ***гамильтониан системы***. Эту гиперповерхность называют ***локальной поверхностью гамильтониана*** или ***локальной фигуратриссой*** метрики Финслера.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Уравнения

$$L(q^\alpha, x^\alpha) = 1,\ x^\alpha \in T^n(P),\ P \in X^n \tag{6}$$

$$H(q^\alpha, y_\alpha) = 1,\ y_\alpha \in T^{*n}(P),\ P \in X^n \tag{7}$$

определяют **контравариантную** и **ковариантную** векторные метрики в F^n.

Теорема взаимности:

Локальная поверхность гамильтониана Π_H (***локальная фигуратриса***) есть взаимно полярная поверхность для поверхности лагранжиана Π_L (***локальная индикатриса***) и обратно.

Это есть «математическое оформление» известного соотношения де-Бройля $\lambda = \dfrac{h}{p} \quad (h = c = 1)$.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Геометризация интеграла действия (2) становится особенно наглядной и удобной, если перейти от (6) и (7) к векторно-параметрической форме записи уравнения локальной индикатрисы:

$$x^\alpha = \ell^\alpha(q^\alpha, \Theta^a) = 1,\ a = 1, 2, ..., n-1, \tag{8}$$

$$y_\alpha = \ell_\alpha(q^\alpha, \Theta^a) = 1,\ a = 1, 2, ..., n-1. \tag{9}$$

Здесь Θ^a – параметры, определяющие положение точки или касательной гиперплоскости на указанной поверхности $\Theta^a \in X^{n-1}$.

Состояние частицы описывается координатами положения точки на локальной индикатрисе.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Согласно В. Вагнеру [6]
пространство Финслера F^n есть расслоенное пространство — математический аналог термина фазовое пространство).
Базой его является пространство конфигураций X^n, а слоями — касательные пространства T^n с заданными в них локальными индикатрисами X^{n-1}.
Приходим к расслоенному пространству $X^{n-1}(X^n)$, которое есть геометрическая модель принципа наименьшего действия для случая обыкновенного интеграла (2).

[6] Вагнер В. *Геометрия Финслера как теория поля локальных поверхностей.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. VII (1949). С. 65.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Геометрия риманова пространства R^n (при $n = 4$ имеем математический фундамент ОТО) есть
<u>частный случай геометрии финслерова пространства F^n.</u>
Она сводится к теории поля локальных центральных гиперповерхностей второго порядка. Их центры совпадают с центрами соответствующих локальных касательных T^n.
Итак, математический аппарат ОТО есть частный случай геометрии Финслера: $R^4 \subset F^4$.
Это приводит к серьезным и далеко идущим следствиям.

Пример.

Метрическая функция «свободной» релятивистской частицы без заряда и спина в СТО (пространство Минковского M^4); $n = 4$; $q^\alpha \equiv x^\alpha, \alpha = 0, 1, ..., 3$; $X^4 \equiv E^4$

$$L(x, \dot{x}) = m\sqrt{\dot{x}^2}. \tag{10}$$

Индикатриса метрики для (10) — 3-мерный гиперболоид (3-псевдосфера) с центром в каждой точке E^4

$$x^\alpha = l^\alpha(\Theta^a), a = 1, 2, 3 \tag{11}$$

лежит на световом конусе с вершиной в каждой точке E^4 Уравнения (11) задают **метрику Минковского**.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Другими словами

геометризация действия «свободной» релятивистской частицы (без заряда и спина!) приводит к геометрии пространства Минковского M^4.
Метрику можно задавать в векторной (посредством задания индикатрисы), либо тензорной формах.
Локальная фигуратриса в соответствующем локальном T^{*4} (пространство 4-импульсов) является двойственным индикатрисе геометрическим образом.
Уравнение фигуратрисы есть уравнение «массовой поверхности» для частицы единичной массы.

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \ (m^2 = 1). \tag{12}$$

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа) свободной релятивистской частицы

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \ell(\Theta^a), \ \frac{d\Theta^a}{ds} = 0, (\alpha = 0, ...3; a = 1, 2, 3). \qquad (13)$$

Имеем уравнения движения записанные сразу для всех инерциальных наблюдателей. Здесь пространство-время F^4 «вырождается» в пространство M^4.

Пусть теперь имеем дело со «свободной» частицей обладающей зарядом, например, электрон. Последний поляризует вакуум вокруг себя. Вместо (10) получаем

$$L(x, \dot{x}) = m\sqrt{g_{\alpha\beta}(x)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta} \qquad (14)$$

Этот частный случай пространства Финслера F^4 называют **локально-анизотропным пространством Минковского.**

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрика Лагранжа

Пусть теперь на систему наложены p связей

$$\Phi_p(q, \dot{q}) = 0, \ (p = m + 1, ..., n). \qquad (15)$$

Имеем задачу Лагранжа в вариационном исчислении. Индикатриса метрики задачи Лагранжа будет m-мерной поверхностью $X^m(P)$ где $m = 1, ..., n - 1$. Приходим к понятию **метрика Лагранжа**. Геометрически задача сводится к теории поля локальных поверхностей

$$\ell^\alpha = \ell^\alpha(q^\beta, \Theta^a), \ (\alpha, \beta = 1, ..., n; a = 1, ..., m). \qquad (16)$$

В частном случае пространства X^n с метрикой Лагранжа при $m = n - 1$ возвращаемся в пространство F^n.

Объект связности в расслоенном пространстве $X^m(X^n)$

$$\Gamma^a = \Gamma^a(q^\alpha, \Theta^a) \tag{17}$$

определяет отображения локальных m-поверхностей $X^m(P)$ вдоль произвольных линий $q^\alpha = q^\alpha(t)$ базисного пространства X^n.

Теорема (Жотиков Г. И: 1965)

Связность Γ^a ***в расслоенном пространстве*** $X^m(X^n)$ ***определяется инвариантным образом через фундаментальную систему геометрических объектов*** m***-поверхности*** $G^a_{ab}, G^r_{ap}, g^p_{ab}, g^b_{ap}, v^a, v^p$ ***являющихся функциями переменных*** q^α ***и*** Θ^a.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уравнения движения релятивистской динамики

Уравнения движения в $X^m(X^n)$ имеют вид:

$$\frac{dq^\alpha}{ds} = \ell^\alpha(q^\lambda, \Theta^a) \tag{18}$$

$$\frac{d\Theta^a}{ds} + \Gamma^a_c v^c(q^\lambda, \Theta^b) + \Gamma^a_p v^p(q^\lambda, \Theta^b) = 0. \tag{19}$$

Здесь Γ^a_c и Γ^a_p есть коэффициенты разложения объекта связности $\Gamma^a(q^\alpha, \Theta^a)$ по базисным 1-формам ℓ^a и ℓ^p, p – число уравнений связей. При $p = 0$ возвращаемся в F^n.

Система (18), (19) есть геометрически-инвариантная форма уравнений движения релятивистской динамики.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уравнения движения релятивистской динамики

Принципиальным отличием геометрической формы уравнений движения (18, 19) от лагранжевой и гамильтоновой форм уравнений движения состоит в том, что ее уравнения описывают движения в фазовом пространстве (с введенной в нем набором метрологических процедур измерения физических величин), т. е. относительно полного ансамбля произвольных наблюдателей
в том числе и неинерциальных!.

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Калибровочный принцип наряду с вариационным принципом является одним из краеугольных принципов современной физики. Термины «калибровочная симметрия» и «калибровочные преобразования» были введены **Г. Вейлем** (H. Weyl) примерно в 1920 году. Калибровочные преобразования в электродинамике: тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(x)$ и уравнения Максвелла не изменяются если 4-вектор-потенциал $A_\mu(x)$ ЭМ-поля преобразуется как

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \mu = 1, ..., 4. \qquad (20)$$

$\partial_\mu f(x)$ – градиент от произвольной скалярной функции $f(x)$ координат пространства-времени.

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Существенный вклад в осознание роли калибровочных преобразований в физике внес В. И. Фок (1898 – 1974). Калибровочные преобразования могут быть записаны так:

$$L \rightarrow L' + \frac{df(q)}{dt}. \tag{21}$$

$f(q)$ – произвольная функция от обобщенных координат.

Геометрическую интерпретацию калибровочным преобразованиям дал великий математик XX века **В. Вагнер** (V. Wagner) в 1945 году. [7]
система единиц $c = h = 1$

[7] Вагнер В. *Гомологическое преобразование метрики Финслера*. ДАН СССР, Том 46, № 7. 1945. С. 287.

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Будем иметь дело с пространством F^4.
Геометрическая интерпретация преобразований (21):

$$'p_\alpha = p_\alpha - \sigma_\alpha, \tag{22}$$

$$'x^\alpha = \frac{x^\alpha}{1 - \sigma_\beta x^\beta}, \tag{23}$$

$\sigma_\alpha = \partial_\alpha f(q)$ – градиент скалярной функции $f(q)$.
В случае F^4 имеем простую физическую интерпретацию:
$p = (E, \mathbf{p})$ – 4-вектор импульсного пространства,
$x = (t, \mathbf{x})$ – 4-вектор координатного пространства.
Преобразования (22) в импульсном пространстве индуцируют в координатном пространстве преобразования (23). Соответственно преобразования (23) в координатном пространстве индуцируют преобразования (22) в импульсном пространстве .

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований приводит к одной из подгрупп группы проективных преобразований.
Она называется группой гомологических преобразований.
Термины ***гомология*** и ***гомологические преобразования*** введены в геометрию **Ж. Понселе** (J. Poncelet: 1822)
В вариационном исчислении преобразования (21) называются **преобразованиями Каратеодори** [8].
Он первым применил их для получения достаточных условий функционалов действия типа (2)

[8] Caratheodory C. *Variationsrechnung*. Leipzig, Berlin, 1935. P. 197

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Гомология (греч. homologia) — соответствие

В проективной геометрии на плоскости – автоморфизм проективной плоскости P^2 при котором одна прямая (ось гомологии) и точно одна точка (центр гомологии) переходят в себя.

Проективная плоскость P^2 – замкнутая односторонняя поверхность наподобие листа Мебиуса.

Группа гомологий и группа вращений образуют группу центрально-проективных преобразований.

Проективная геометрия находит в физике важное применение.

Она обеспечивает геометрическую интерпретацию калибровочным преобразованиям и, в целом, принципу калибровочной инвариантности.

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Если дифференциальными инвариантами евклидовой и псевдоевклидовой геометрий является квадрат дифференциала эквиаффинной длины траектории $ds^2 = const$, то в проективной геометрии этот инвариант обобщается. Теперь он выглядит так:

$$d\kappa \cdot ds^2 = const. \tag{24}$$

Здесь $d\kappa$ – дифференциал эквиаффинной кривизны траектории. Движение тел по таким (плоским) траекториям (орбитам) есть движение по инерции. Этому условию удовлетворяют кривые второго порядка: эллипс (окружность), гипербола и парабола.
Что дает инвариант (8) $d\kappa \cdot ds^2 = const$?

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Уравнения движения выводятся из принципа наименьшего действия. Используется естественное соображение о *эквивалентности между собственным временем τ часов с длиной дуги их траектории*:

$$\tau = \int_\gamma ds. \tag{25}$$

Здесь ds – дифференциал эквиаффинной длины дуги траектории. В нашем случае будет иметь место более общее соотношение для собственного времени τ:

$$\tau = \int_\gamma \sqrt[3]{d\kappa \cdot ds^2}. \tag{26}$$

Приходим к более общему, классу решений уравнений движения свободной частицы.

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности

Фундаментальные истины даются не просто.

Чтобы понять, что существуют движения по инерции, потребовалось примерно 2 тысячи лет — от Аристотеля до Ньютона.
Чтобы осознать, что инерциальное движение может быть и ускоренным, потребовалось еще около 300 лет — от Ньютона до наших дней.
Так, свободное падение в гравитационном поле есть инерциальное движение в неинерциальной системе отсчета.
Движение пробных тел по законам Кеплера как раз и представляют собой ускоренные, но инерциальные (состояния) движения пробных тел — движения по инерциальным траекториям.

Об устойчивости физических структур

Первая вариация действия обеспечивает стационарность траектории (необходимые условия экстремума действия), но не ее устойчивость.
За устойчивость несут ответственность достаточные условия экстремума.

Исключительная устойчивость атома водорода объясняется тем, что при движении электрона в этой системе (атом водорода) не происходит рассеяния энергии в пространство.
Представленные результаты применимы не только для микромира.

Ток в сверхпроводнике не затухает в силу тех же квантовых причин, что и движение электронов в атомах, но при этом может распространяться на макроскопически большие расстояния.

Заключение

1. Геометрическая интерпретация принципа наименьшего (экстремального) действия приводит к геометрии пространства Финслера F^n.

2. Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности приводит к необходимости введения в физику идей и методов проективной геометрии.

Это дает основание для развития
новых методов исследования физических структур
и понимания истинной роли сил и полей инерции в Природе.

6. Метрику следует рассматривать как «вторичный», т.е. **не фундаментальный объект теории**.

Заключение

К 6-й проблеме Гильберта

На II-м Международном конгрессе математиков (Париж, 1900 г.) Д. Гильберт сформулировал свои, ставшие вскоре знаменитыми 23 проблемы.
Эти проблемы должны были стать главными целями исследований для будущих поколений математиков мира.

6-я проблема — построение аксиоматики физики.

В физике такими принципами (аксиомами) оказываются:

1) принцип наименьшего (экстремального) действия;
2) принцип калибровочной инвариантности.

Геометрическая интерпретация указанных принципов была нами продемонстрирована.

Заключение

Физика есть единая наука.

«Несмотря на ставшую уже общепринятой традицию делить физику на микроскопическую и макроскопическую, в действительности нет четкой границы между ними. Проведение такой границы зависит от уровня наших знаний, и граница постоянно «передвигается».
В частности, квантование и возникновение замкнутых орбит (стоячих волн) вовсе не является привилегией только микросистем.» (Ф. А. Гареев, ОИЯИ)

<u>А. Эйнштейн:</u>
«Физика — есть геометрия + опыт».
Смысл этой фразы становится теперь понятным.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!