

---

# ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. КОГЕРЕНТНОСТЬ

## 1. Основные понятия

### 1.1. Волновое уравнение. Простейшие типы волн

Волновое уравнение, описывающее поведение электромагнитных волн (в том числе волн света), — важнейшее следствие уравнений Максвелла, которым подчиняются все явления электромагнетизма. В явлениях, о которых идёт речь в этой книге (кроме раздела VII, посвящённого поляризации света), векторный характер электрического и магнитного полей в волне оказывается несущественным, поэтому волновой процесс можно описывать скалярной функцией координат и времени  $E(x, y, z, t)$  (или, коротко,  $E(\mathbf{r}, t)$ ) и понимать под  $E$  какую-либо компоненту напряжённости электрического (или магнитного) поля в электромагнитной волне.

Волновое уравнение для скалярного поля  $E$  имеет вид

$$\nabla^2 E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,

$$v = \frac{c}{n}$$

— скорость электромагнитной волны в среде,  $c$  — скорость света в вакууме,  $n$  — показатель преломления среды.

В наиболее простом случае функция  $E$  зависит лишь от одной координаты  $z$ , т. е. в любой плоскости, перпендикулярной оси  $z$  (плоскости  $z = \text{const}$ ), величина  $E$  одна и та же, независимо от координат  $x$ ,  $y$  в этой плоскости. Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что произвольная функция вида  $E(z \mp vt)$  является решением уравнения (2.2). Общее решение уравнения (2.2) — произвольная линейная комбинация таких функций.

Зависимость вида  $E(z, t) = E(z - vt)$  соответствует интуитивному представлению о волне, как о возмущении, которое распространяется в пространстве в направлении оси  $z$  с конечной скоростью  $v$ . Действительно, значение, которое принимает величина  $E$  в точке  $z$  в момент времени  $t$  повторяется в точке  $z + \Delta z$  в момент времени  $t + \Delta t$ , где  $\Delta z = v\Delta t > 0$  (поскольку аргумент функции  $z - vt$  при этом не изменится:  $z - vt = (z + \Delta z) - v(t + \Delta t)$ ). Волне, бегущей в обратном направлении (навстречу оси  $z$ ), соответствует аргумент  $z + vt$ .

### 1.1.1. Плоская монохроматическая волна

Волна, описываемая функцией координат и времени вида

$$E(z, t) = a \cos(\omega t - kz), \quad (2.3)$$

где  $\omega$  и  $k$  — константы, называется плоской монохроматической волной. При фиксированном  $z$  мы имеем гармонический колебательный процесс частоты  $\omega$  и амплитуды  $a$ .

Можно убедиться непосредственной подстановкой, что функция (2.3) удовлетворяет волновому уравнению (2.2), если

$$k = \frac{\omega}{v}. \quad (2.4)$$

Константа  $k$  называется **волновым числом**. Константа  $a$  в (2.3) — **амплитуда волны**, а аргумент косинуса  $\omega t - kz = \varphi$  — **фаза волны**. Очевидно, в любой фиксированной плоскости  $z = \text{const}$  колебания величины  $E$  происходят «в такт», синхронно (обычно говорят *синфазно*). Поверхности, на которых колебания возмущения  $E$  происходят синфазно, называются **волновыми поверхностями**. В данном случае волновые поверхности — плоскости  $z = \text{const}$  (перпендикулярные оси  $z$ ). Поэтому волна (2.3) называется **плоской**. Поскольку колебания происходят по гармоническому закону, волна (2.3) также называется **гармонической** (в оптике принят термин **монохроматическая**, т. е. «одноцветная»).

Величина

$$v = \frac{\omega}{k}$$

называется **фазовой скоростью**. Это скорость, с которой перемещается поверхность постоянной фазы колебаний — **волновая поверхность**. Действительно, поверхности равных фаз определяются соотношением

$\omega t - kz = \text{const}$ , откуда в результате дифференцирования по времени получим  $\omega - k \frac{dz}{dt} = 0$ , и  $\frac{dz}{dt} = \omega/k$ .

Ещё одно важное понятие — **волновой вектор  $\mathbf{k}$** . Это вектор, совпадающий по направлению с нормалью к волновой поверхности (и вектором скорости, с которой перемещается волновая поверхность), причём модуль вектора  $\mathbf{k}$  равен волновому числу  $|\mathbf{k}| = k = \omega/v$ .

Разность фаз  $\Delta\varphi$  колебаний на двух волновых поверхностях, разделённых расстоянием  $\Delta z$ , равна  $\Delta\varphi = k\Delta z$ . Расстояние между волновыми поверхностями, колебания на которых происходят с разностью фаз  $\Delta\varphi = 2\pi$  (т. е. колебания на этих поверхностях происходят синхронно, в такт), называется **длиной волны** и обозначается буквой  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2.5)$$

Используя определение (2.4) волнового числа  $k$ , находим

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}v = vT, \quad (2.6)$$

где  $T = 2\pi/\omega$  — период колебания. Из (2.6) ясно, что *длина волны есть расстояние, на которое перемещается волновая поверхность за время, равное одному периоду колебания.*

В общем случае плоская монохроматическая волна (распространяющаяся в произвольном направлении) имеет вид

$$\boxed{E(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi_0)}, \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  — скалярное произведение волнового вектора  $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$  и радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  точки наблюдения  $\mathbf{r}(x, y, z)$ :  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ . Направление распространения волны (направление, в котором перемещаются волновые поверхности) задаётся направлением вектора  $\mathbf{k}$ . Для общности в аргумент косинуса введена начальная фаза  $\varphi_0$  (фаза колебаний в момент  $t = 0$  в начале координат).

Уравнение  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$  — это уравнение плоскости, нормаль к которой совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{k}$  и, как следует из (2.7), во всех точках  $(x, y, z)$ , принадлежащих плоскости  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ , колебания происходят синфазно. Предоставляем читателю убедиться, что функция (2.7) удовлетворяет волновому уравнению (2.1), если

$$k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2, \quad (2.8)$$

причём частота волны может быть любой. Направление распространения волны также произвольно: проекции волнового вектора  $\mathbf{k}$  можно изменять как угодно, лишь бы сумма их квадратов удовлетворяла равенству (2.8). Таким образом, уравнение (2.7) описывает целую совокупность, множество решений волнового уравнения — множество плоских волн, отличающихся частотой колебаний и направлением распространения.

Плоские монохроматические волны (2.7) называют также *бегущими плоскими волнами*, подчёркивая таким образом, что волновые поверхности перемещаются в пространстве, и скорость их перемещения — это и есть фазовая скорость.

Плоская монохроматическая волна представляет собой математическую идеализацию: ведь волновые поверхности этой волны — плоскости неограниченной протяжённости, амплитуда колебаний отлична от нуля во всех точках волновых поверхностей (от минус до плюс бесконечности). Это — такая же идеализация, как бесконечно длящийся, неограниченный во времени гармонический колебательный процесс  $\cos \omega t$ .

### 1.1.2. Сферическая волна

Волна, описываемая выражением

$$E(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr - \varphi_0), \quad (2.9)$$

называется *сферической*<sup>1</sup>. В уравнении (2.9)  $r$  — расстояние от начала координат (где расположен источник волны) до точки наблюдения  $(x, y, z)$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Согласно (2.9), колебания  $E$  происходят синфазно во всех точках пространства, отстоящих от источника на фиксированное расстояние  $r = \text{const}$ , т. е. волновые поверхности — это сферы, центр которых (источник волны) находится в начале координат.

Обратим внимание на различие уравнений (2.7) и (2.9). В уравнении плоской волны аргумент косинуса содержит скалярное произведение векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}$ . В уравнении сферической волны — произведение волнового числа  $k$  на расстояние  $r$  точки наблюдения от источника волны.

<sup>1</sup> Заметим, что реальная (векторная) поперечная электромагнитная волна не может быть чисто сферической (элементарным источником является диполь, а не точка). Приближение сферической волны в оптике означает, что мы можем считать некоторый участок волнового фронта имеющим сферическую форму с точностью до малых поправок.

Дифференцируя равенство  $\omega t - kr = \text{const}$ , получаем  $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} > 0$ , т. е. волновые поверхности бегут *от источника*, и волну называют *расходящейся*. Напротив, выражение

$$E(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t + kr)$$

описывает сферическую волну, в которой волновые поверхности бегут к началу координат ( $\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega}{k} < 0$ ). Это — *сходящаяся сферическая волна*.

Наконец, ещё одно существенное обстоятельство: в отличие от плоской волны амплитуда колебаний в сферической волне по мере увеличения расстояния от источника убывает по закону  $A(r) = \frac{a}{r}$ .

### 1.2. Монохроматические волны. Комплексная амплитуда. Уравнение Гельмгольца

В самом общем случае монохроматическая волна (не обязательно плоская или сферическая) имеет вид

$$E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r})), \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения.

Функции координат  $a(\mathbf{r})$  и  $\varphi(\mathbf{r})$  определяют *пространственную структуру волны*, в том числе и форму волновых поверхностей.

При изучении монохроматических волн, так же как и при изучении гармонических колебаний, удобно использовать комплексную форму записи. Наряду с волной (2.10) рассмотрим волновой процесс вида

$$E_1(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \sin(\omega t - \varphi(\mathbf{r})). \quad (2.11)$$

Ясно, что если функция (2.10) описывает некоторый волновой процесс (т. е. удовлетворяет волновому уравнению), то функция (2.11) также описывает волну. Ясно также, что линейная комбинация функций (2.10) и (2.11) вида

$$V(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) - iE_1(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

где  $i$  — мнимая единица, также удовлетворяет волновому уравнению (линейная суперпозиция решений волнового уравнения также является решением).

Используя тождество  $\cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}$ , перепишем (2.12) в виде

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{-i[\omega t - \varphi(\mathbf{r})]}.$$

Функцию  $V(\mathbf{r}, t)$  можно записать в виде произведения двух функций, одна из которых

$$f(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})} \quad (2.13)$$

зависит только от координат, а вторая  $e^{-i\omega t}$  — только от времени:

$$V(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (2.14)$$

Комплексная функция  $f(\mathbf{r})$  полностью определяет *пространственную структуру волны* (т. е. распределение в пространстве амплитуд  $a(\mathbf{r})$  и фаз  $\varphi(\mathbf{r})$  колебаний) и называется комплексной амплитудой волны. Будем для краткости называть эту функцию **волновым полем** или просто **полем**. В частности, для плоской волны (2.7)  $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0$  и  $a(\mathbf{r}) = a = \text{const}$ , поэтому

$$f(x, y, z) = ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)} = ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0)}.$$

Комплексная амплитуда сферической волны (2.9) есть

$$f(r) = ae^{i\varphi_0} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Итак, комплексная функция  $V(\mathbf{r}, t)$ , определяемая равенством (2.14), должна быть решением волнового уравнения

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.14) в (2.15), приходим (после сокращения на множитель  $e^{-i\omega t}$ ) к уравнению

$$\boxed{\nabla^2 f + k^2 f = 0.} \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) для комплексных амплитуд называется уравнением Гельмгольца.

## 2. Интерференция монохроматических волн

### 2.1. Двухлучевая интерференция. Видность полос

Пусть в пространстве распространяются две монохроматические волны одинаковой частоты с амплитудами  $a_1$  и  $a_2$ , и пусть в некоторой точке наблюдения их фазы равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно.

Согласно принципу суперпозиции, результирующий колебательный процесс в точке наблюдения представляет собой сумму колебаний, создаваемых каждой из волн, т. е. гармоническое колебание той же частоты  $\omega$ . Интенсивность результирующего колебания (квадрат амплитуды  $I = a^2$ ) можно найти используя правило сложения векторов (рис. 2.1):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi, \quad (2.17)$$

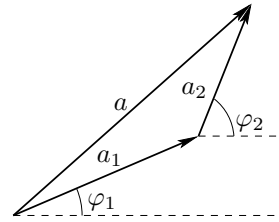


Рис. 2.1. Сложение колебаний

где  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  — разность фаз,  $I_1 = a_1^2$  и  $I_2 = a_2^2$  — интенсивности слагаемых волн.

Напомним, что интенсивность — величина, пропорциональная плотности потока энергии в волне. Равенство (2.17) показывает, что плотность потока энергии в результирующей волне не равна в общем случае сумме потоков энергии в слагаемых волнах. В пространстве, где налагаются две волны, происходит *перераспределение потоков энергии*: в некоторых точках пространства результирующая интенсивность больше суммы интенсивностей слагаемых волн ( $\cos \Delta\varphi > 0$ ), в других точках, наоборот, результирующий поток энергии меньше суммы потоков энергии в слагаемых волнах ( $\cos \Delta\varphi < 0$ ). Это явление называется **интерференцией**. При наложении волн одинаковой интенсивности  $I_1 = I_2 = I_0$  имеем из (2.17):

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi). \quad (2.18)$$

Чередующиеся максимумы  $I_{\max}$  и минимумы  $I_{\min}$  результирующей интенсивности образуют интерференционные полосы.

**Двухлучевая интерференция.** В любой двухлучевой интерференционной схеме свет от *одного источника* приходит в точку наблюдения по двум различным путям  $r_1$  и  $r_2$  (двум «плечам» интерференционной схемы) с разностью фаз  $\Delta\varphi = k_2 r_2 - k_1 r_1$ , где  $k_1 = n_1 \omega / c$  и  $k_2 = n_2 \omega / c$  (частота волны при переходе из одной среды в другую остаётся неизменной). Таким образом,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{c}(n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{\omega}{c} \cdot \Delta, \quad (2.19)$$

где  $n_2$  и  $n_1$  — показатели преломления среды вдоль путей  $r_2$  и  $r_1$  соответственно. Произведение показателя преломления на расстояние, пройденное светом, называют **оптическим путём**, а

$$\Delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 \quad (2.20)$$

есть разность оптических путей двух плеч интерферометра (оптическая разностью хода).

Если амплитуды (и интенсивности) волн в точке наблюдения одинаковы, из (2.18) получаем

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \frac{\omega}{c} \Delta \right). \quad (2.21)$$

Эта формула справедлива при интерференции любых монохроматических волн одинаковой частоты и интенсивности.

**Видность.** Контраст интерференционной картины принято характеризовать величиной **видности**  $V$ , определяемой равенством

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (2.22)$$

Интенсивность максимальна и равна  $I_{\max} = (a_1 + a_2)^2$  при  $\Delta\varphi = 2\pi m$ , где  $m$  — целое число, называемое **порядком интерференции**. Геометрическое место точек, удовлетворяющих этим условиям, образует максимумы (светлые интерференционные полосы)  $m$ -го порядка. При  $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$  возникают минимумы (тёмные интерференционные полосы). Видность максимальна (и равна единице) при равных амплитудах волн, при этом  $I_{\max} = 4I_0$  вдвое больше суммы интенсивностей слагаемых волн, а  $I_{\min} = 0$ .

## 2.2. Интерференция различных типов волн. Ширина интерференционных полос

### 2.2.1. Интерференция сферических волн

Пусть волны излучаются в пустоте ( $n = 1$ ) двумя точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$  (источники излучают синфазно с одинаковыми амплитудами),  $r_1$  и  $r_2$  — расстояние от источников до точки наблюдения. Разность фаз колебаний в точке наблюдения  $\Delta\varphi = k\Delta$ , где  $\Delta = r_2 - r_1$  — разность хода волн,  $k = \frac{\omega}{c}$  — волновое число.

При  $\Delta = m\lambda$  ( $\Delta\varphi = 2\pi m$ ) получаем интерференционный максимум (светлую полосу)  $m$ -го порядка. При  $\Delta = m\lambda + \frac{\lambda}{2}$  — интерференционный минимум ( $\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$ ). Если расстояния  $r_1$  и  $r_2$  до точки наблюдения много больше расстояния между источниками  $d$ , то амплитуды (и интенсивности) слагаемых волн примерно одинаковы  $I_1 \approx I_2 = I_0$  и тогда справедливо равенство (2.21).

Геометрическое место точек, для которых  $r_2 - r_1 = \text{const}$ , — это гиперboloиды вращения. Таким образом, поверхности интерференционных максимумов — это гиперboloиды  $r_2 - r_1 = m\lambda$ , сечения которых



плоскостью, в которой лежат источники  $S_1$  и  $S_2$  (плоскость рисунка), показаны на рис. 2.2.

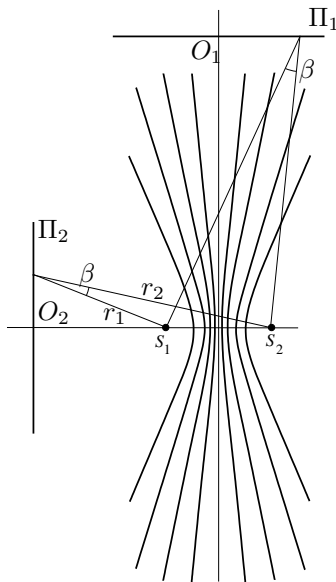


Рис. 2.2. Интерференция сферических волн

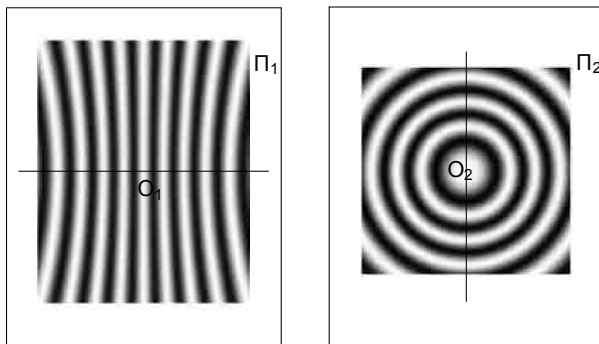
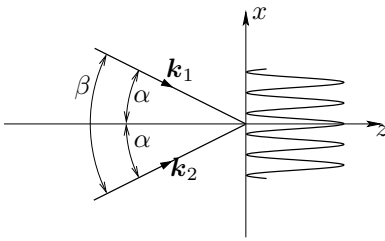


Рис. 2.3. Картина интерференции сферических волн в плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$

Форма интерференционных полос, наблюдаемых на каком-либо экране, зависит от его положения. Например, на экране  $\Pi_1$ , параллельном линии  $S_1S_2$ , соединяющей источники, полосы имеют вид по-

что параллельных прямых, если рассматривать малую область вблизи точки  $O_1$  — центра экрана (рис. 2.3). На экране  $\Pi_2$ , плоскость которого перпендикулярна линии  $S_1S_2$ , полосы равной интенсивности — концентрические кольца, центры которых лежат в точке  $O_2$  экрана  $\Pi_2$ .

### 2.2.2. Интерференция плоских волн



Рассмотрим результат интерференции двух плоских волн:  $E_1 = a_0 \cos(\omega t - kx \sin \alpha)$  и  $E_2 = a_0 \cos(\omega t + kx \sin \alpha)$  одинаковой частоты и амплитуды, падающих на экран (плоскость наблюдения  $z = 0$ ) под углами  $\alpha$  и  $-\alpha$  (рис. 2.4). Используя (2.18), получаем

Рис. 2.4. Интерференция плоских волн

$$I = 2I_0[1 + \cos(2kx \sin \alpha)]. \quad (2.23)$$

Переход от одной светлой полосы (интерференционного максимума) к другой соответствует изменению аргумента косинуса в (2.23) на  $2\pi$ :

$$2k\Delta x \sin \alpha = 2\pi,$$

откуда

$$\Delta x = l = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \quad (2.24)$$

( $\beta = 2\alpha$  — угол схождения волн, рис. 2.4).

Для малых углов схождения  $\sin \frac{\beta}{2} \approx \frac{\beta}{2}$  имеем простую оценку

$$l \approx \frac{\lambda}{\beta}. \quad (2.25)$$

Расстояние  $l$  между двумя соседними максимумами (или минимумами) интерференционной картины  $I(x)$  называется шириной интерференционной полосы. В реальных условиях почти всегда можно использовать приближённую формулу (2.25) для ширины полосы, поскольку на малых участках плоскости наблюдения (порядка нескольких полос  $l$ ) волновые поверхности интерферирующих волн можно считать плоскими. В частности, её можно использовать для оценки ширины полосы при интерференции сферических волн при условии, что  $r_1$  и  $r_2$  много больше расстояния между источниками (рис. 2.2).

### 3. Статистическая природа излучения. Когерентность

Волновые или колебательные процессы, протекающие согласованно во времени и пространстве, называют когерентными. Два гармонических колебания являются когерентными, если их *разность фаз постоянна во времени*. Стабильная интерференционная картина двух волн может наблюдаться, только если колебания в интерферирующих волнах остаются когерентными — то есть имеют практически неизменную разность фаз — в течение времени, достаточного для наблюдения сигнала детектором<sup>2</sup>.

#### 3.1. Статистическая модель излучения света источником

Колебания электрического поля в волне, излучаемой любым реальным источником света, не являются строго гармоническими. В противном случае мы бы сталкивались с явлением интерференции буквально на каждом шагу. Мы не видим интерференционные полосы на стене комнаты, освещённой двумя электрическими лампочками. Это означает, что при описании излучения реального источника света следует отказаться от использования «гармонической» идеализации и более внимательно рассмотреть структуру излучения.

Опишем её в общих чертах, используя простейшую из возможных моделей процесса излучения света тепловым или газоразрядным источником, например, светящимся газом. Существуют три важных обстоятельства, определяющих структуру излучения. Во-первых, *излучает огромное число возбуждённых атомов источника*. Второе обстоятельство состоит в том, что *процесс излучения атома длится конечное время*, такое излучение принято называть «цугом» — «обрывком» (в отличие от бесконечно длящегося гармонического процесса). Третье обстоятельство связано со *случайным, статистическим характером механизма возбуждения атомов*: к возбуждению может приводить столкновение между атомами при тепловом, *хаотическом* движении, электронный удар, поглощение кванта света. Всё это приводит к тому, что моменты возникновения излучаемых цугов являются случайными, не связанными между собой величинами.

На рис. 2.5 показана последовательность цугов излучения какого-либо  $n$ -го атома. Цуги возникают («зажигаются», «вспыхивают») в случайные моменты времени  $t_1, t_2, t_3...$  Суммарное излучение источ-

---

<sup>2</sup> Иными словами, времени инерционности, в течение которого детектор производит усреднение попадающего на него излучения. Например, для человеческого глаза это величина  $\sim 0,1$  с.

ника

$$E(t) = \sum_n E_n(t) \quad (2.26)$$

содержит в *каждый момент времени* огромное число «живых» (отличных от нуля) слагаемых.

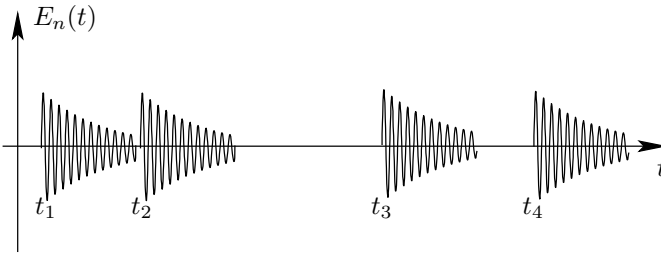


Рис. 2.5. Последовательность цугов, излучаемых атомом

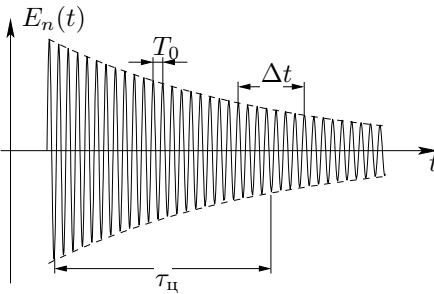


Рис. 2.6. Отдельный цуг излучения — колебание затухающего осциллятора

Если следовать классическим представлениям, излучающий атом — это возбуждённый случайным толчком осциллятор (электрон в атоме). Будем далее полагать, что все осцилляторы среды имеют одну и ту же собственную частоту  $\omega_0$  (период колебаний оптического диапазона излучения  $T_0 = 2\pi/\omega_0 \simeq 10^{-15}$  с). Колебания возбуждённого осциллятора затухают вследствие потери энергии на излучение (т.н. радиационное затухание), поэтому цуг излучения повторяет процесс затухающих колебаний классического осциллятора (рис. 2.6). Из анализа классической модели следует, что время затухания (длительность цуга излучения) равно по порядку величины  $\tau_{\text{ц}} \approx 10^{-8}$  с. Важно обратить внимание на соотношение величин  $T_0$  и  $\tau_{\text{ц}}$ :  $T_0/\tau_{\text{ц}} \lesssim 10^{-7}$ , т.е. *цуг излучения атома содержит огромное число ( $\sim 10^7$ ) периодов* (добротность осциллятора  $\sim 10^7$ ). Это означает, что на интервале времени  $\Delta t$ , малом по сравнению с  $\tau_{\text{ц}}$  (но содержащем большое число периодов  $T_0$ :  $T_0 \ll \Delta t \ll \tau_{\text{ц}}$ ), колебание поля в цуге излучения практически *неотличимо от гармонического* (рис. 2.6).

Если следовать классическим представлениям, излучающий атом — это возбуждённый случайным толчком осциллятор (электрон в атоме). Будем далее полагать, что все осцилляторы среды имеют одну и ту же собственную частоту  $\omega_0$  (период колебаний оптического диапазона излучения  $T_0 = 2\pi/\omega_0 \simeq 10^{-15}$  с). Колебания возбуждённого осциллятора затухают вследствие потери

Представим суммарный (2.26) процесс в виде *хаотически-модулированного по амплитуде*  $a(t)$  и *фазе*  $\varphi(t)$  колебания с несущей частотой  $\omega_0$ :

$$E(t) = a(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]. \quad (2.27)$$

Легко видеть, что время, в течение которого происходит заметное изменение амплитуды  $a(t)$  и фазы  $\varphi(t)$ , как раз и определяется длительностью цугов  $\tau_{\text{ц}}$ . Действительно, цуги, составляющие суммарный процесс  $E(t)$  на интервале времени  $\Delta t_1$ , не «доживают» до интервала  $\Delta t_2$ , если временной промежуток  $\tau$  между ними превышает  $\tau_{\text{ц}}$ :  $\tau \geq \tau_{\text{ц}}$  (рис. 2.7). За время  $\tau_{\text{ц}}$  происходит полная смена излучаемых цугов новыми цугами. Складываясь с новыми фазовыми соотношениями (ведь моменты возникновения новых цугов совершенно не зависят от того, в какие моменты возникли цуги, выбывшие из игры), они образуют суммарный процесс, амплитуда и фаза которого совершенно не зависят от значений  $a$  и  $\varphi$  в процессе, образованном прежней совокупностью цугов.

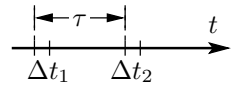


Рис. 2.7

Время  $\tau_0$ , за которое значения амплитуды  $a(t + \tau_0)$  и фазы  $\varphi(t + \tau_0)$  «забывают» прежние значения  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ , называют *временем статистической памяти* процесса (или *временем когерентности*).

В рассматриваемой нами модели цугов  $\tau_0 = \tau_{\text{ц}}$ . В частности, при  $\tau > \tau_{\text{ц}}$  фаза  $\varphi(t + \tau)$  может с равной вероятностью принять любое значение в интервале  $[0, 2\pi]$  независимо от значения фазы  $\varphi(t)$  и, следовательно, равновероятно любое значение разности фаз  $\Delta\varphi(t) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$ . Заметим, что при этом среднее за время  $\Delta t \gg \tau_{\text{ц}}$  значение величины  $e^{i\Delta\varphi(t)}$  равно нулю:

$$\overline{e^{i\Delta\varphi(t)}} = \overline{\cos \Delta\varphi(t)} + i \overline{\sin \Delta\varphi(t)} = 0. \quad (2.28)$$

Разумеется, «забывание» значений  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  происходит постепенно: за время  $\tau < \tau_{\text{ц}}$  «выбывает из игры» (заканчивается и заменяется новыми) лишь доля общего числа цугов, равная в среднем отношению  $\tau/\tau_{\text{ц}}$ . Часть же цугов, равная  $1 - \tau/\tau_{\text{ц}}$ , составляет суммарный процесс колебаний и на интервале  $\Delta t_1$ , и на интервале  $\Delta t_2$ , поэтому частично сохраняется корреляция (когерентность) колебаний  $E(t)$  и  $E(t + \tau)$ . За промежуток времени  $\tau \ll \tau_{\text{ц}}$  (сильное неравенство!) лишь ничтожная доля цугов в сумме (2.26), равная  $\tau/\tau_{\text{ц}} \ll 1$ , заменяется новыми. Подавляющая же доля составляет суммарный процесс колебания и на интервале  $\Delta t_1$ , и на интервале  $\Delta t_2$ ; амплитуда и фаза суммарного ко-

лебания сохраняются на малом интервале  $\tau \ll \tau_{\text{ц}}$  почти неизменными:

$$a(t) = a(t + \tau), \quad \varphi(t) = \varphi(t + \tau) \quad \text{при} \quad \tau \ll \tau_{\text{ц}}. \quad (2.29)$$

Резюмируя, можно сказать, что когерентность постепенно уменьшается от максимального значения при  $\tau \ll \tau_0$  до почти полной некогерентности при  $\tau > \tau_0$ .

### 3.2. Ширина линии. Механизмы уширения

Конечное время излучения атомов приводит к *немонохроматичности*: ширина  $\Delta\omega_{\text{ц}}$  спектра излучения, состоящей из хаотичного набора цугов, может быть оценена из соотношения неопределённостей:

$$\Delta\omega_{\text{ц}} \sim \frac{2\pi}{\tau_{\text{ц}}}. \quad (2.30)$$

Столкновение между атомами при тепловом хаотическом движении может приводить не только к возбуждению осцилляторов (и изучаемых ими цугов), но и к уменьшению времени излучения уже возбуждённого атома (к уменьшению «времени жизни» возбуждённого состояния), а также к «сбою» фазы излучаемой волны (что эквивалентно появлению нового цуга). В сильно разреженном газе (при малой плотности) среднее время между столкновениями  $\tau_{\text{ст}}$  оказывается больше времени «естественного затухания» цугов  $\tau_{\text{ц}}$  — в этом случае столкновения практически не влияют на длительность цугов. Однако при увеличении плотности газа среднее время между столкновениями уменьшается. Например, при  $\tau_{\text{ст}} \approx 10^{-9}$  с длительность цугов определяется в основном временем  $\tau_{\text{ст}}$ . Уменьшение времени жизни возбуждённого состояния (длительности цугов излучения) приводит к уширению спектра излучения ( $\Delta\omega_{\text{ст}} \sim 2\pi/\tau_{\text{ст}}$ ) — так называемое ударное уширение.

Если речь идёт об излучении нагретого газа, существенную роль может играть эффект Доплера. Частота излучения цуга, регистрируемого в точке приёма, зависит от скорости движения  $v_n$  излучающего  $n$ -го атома:

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{v_n}{c} \cos \theta_n \right),$$

где  $\theta_n$  — угол между направлением на атом-источник и вектором его скорости. Процесс колебаний  $n$ -го цуга в точке приёма можно записать в виде

$$E_n(t) = a_n \cos [(\omega_0 + \Delta\omega_n) t],$$

где  $\Delta\omega_n = \omega_0 \frac{v_n}{c} \cos\theta_n$ . Результирующее колебание в точке наблюдения  $E(t) = \sum E_n(t)$  будет представлять собой сумму цугов с близкими частотами, случайно распределёнными вблизи  $\omega_0$ . Две гармоники близких частот  $\omega_0$  и  $\omega_0 + \Delta\omega_n$  остаются когерентными в течение времени  $\tau_n \lesssim 2\pi/\Delta\omega_n$  (то есть пока разность фаз между ними  $\Delta\varphi = (\omega + \Delta\omega_n)t - \omega t$  много меньше  $2\pi$ ). Как известно, скорости молекул газа в тепловом равновесии подчиняются распределению Максвелла, причём характерная ширина этого распределения  $\Delta v$  равна по порядку величины среднему значению тепловой скорости  $v_T$ . Следовательно, ширина спектра излучения газа  $\Delta\omega_d$  может быть оценена как  $\Delta\omega_d \sim \frac{v_T}{c}$ , соответствующее время когерентности  $\tau_d \sim 2\pi/\Delta\omega_d$ . Это — так называемое доплеровское уширение линии. При высокой температуре ( $\sim 1000$  К) для лёгких атомов  $v_T/c \simeq 10^{-5}$  и  $\tau_d \simeq 10^{-10}$  с. В этом случае время когерентности в суммарном колебании определяется именно эффектом Доплера ( $\tau_{ц} > \tau_{ст} > \tau_d$ ).

Итак, суммарное колебание (2.26) в каждый момент времени может быть представлено как суперпозиция огромного числа «живых» цугов с некоторой средней длительностью  $\tau_0$ . Именно это время будем в дальнейшем называть временем когерентности. В описанных выше случаях  $\tau_0$  определяется минимальным временем процесса: если доминируют столкновительные процессы ( $\tau_{ст} \ll \tau_{ц}, \tau_d$ ), то  $\tau_0 \simeq \tau_{ст}$ , и, аналогично, если ширина линии определяется эффектом Доплера ( $\tau_d \ll \tau_{ст}, \tau_{ц}$ ), то  $\tau_0 \simeq \tau_d$ . Заметим, что наша модель справедлива, если период колебаний в любом случае много меньше времени длительности цугов:  $T_0 \ll \tau_0$ .

Оценка времени затухания цугов, приведённая выше ( $\tau_{ц} \approx 10^{-8}$  с), относится к процессу излучения изолированного классического осциллятора (отдельного атома, не взаимодействующего с другими атомами среды). Эта модель во многих случаях неприменима. Квантовомеханическое рассмотрение показывает возможность существования в некоторых ситуациях состояний с временем жизни, существенно превышающим  $\tau_{ц}$ , а также состояний с временем жизни, на много порядков (до  $10^{-13}$  с) меньшим  $\tau_{ц}$ . Кроме того, представление, основанное на случайном характере моментов возникновения цугов излучения различных атомов среды (моментов  $t_n$  в сумме (2.26)), неприменимо, если речь идёт об индуцированном излучении лазеров, в которых время когерентности  $\tau_0$  результирующего излучения лазера может на много порядков (до  $10^7$  раз) превышать длительность цугов излучения отдельных атомов.

В дальнейшем мы будем говорить об излучении, для которого выполняется условие  $T_0 \ll \Delta t \ll \tau_0$ , в силу чего на интервале времени  $\Delta t$

излучение практически не отличается от гармонического с частотой  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  (квазимонохроматическое излучение).

### 3.3. Функция временной когерентности

В оптике измеряемой величиной является средний за время регистрации  $\Delta t$  поток энергии

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2}.$$

Величину  $I = \overline{E^2}$ , пропорциональную среднему потоку энергии, называют интенсивностью:

$$I = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} E^2(t) dt \sim \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} a^2(t) dt = \overline{a^2(t)}. \quad (2.31)$$

При изучении статистических характеристик излучения удобно использовать комплексную форму записи: реальному колебанию (2.27) ставят в соответствие комплексную функцию

$$V(t) = a(t)e^{-i[\omega_0 t - \varphi(t)]} = A(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.32)$$

где  $A(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$  — комплексная амплитуда; очевидно, что  $E(t) = \text{Re } V(t)$ . Интенсивность, согласно (2.31), может быть выражена через комплексную амплитуду:

$$I = \overline{A(t)A^*(t)} = \overline{a^2(t)}. \quad (2.33)$$

Введём *количественную меру временной когерентности*, которая, как мы увидим, соответствует приведённым выше качественным соображениям о степени когерентности. Функция

$$\Gamma(\tau) = \overline{V(t) \cdot V^*(t + \tau)} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} V(t) \cdot V^*(t + \tau) dt \quad (2.34)$$

называется *функцией временной когерентности случайного процесса*  $V(t)$ . Черта в (2.34) означает усреднение величины  $V(t)V^*(t + \tau)$  за время  $\Delta t$ , определяемое инерционностью регистрирующего устройства. В большинстве используемых устройств (видеокамера, фотоэлемент, глаз человека) величина  $\Delta t$  на несколько порядков превышает время  $\tau_0$  (например, инерционность зрения человека  $\sim 0,1$  с, у некоторых типов фотоприёмников  $\Delta t = 10^{-3} - 10^{-5}$  с). Однако



существуют современные детекторы и соответствующие электронные схемы с очень малым временем разрешения  $\Delta t < \tau_0$ , при этом в любом случае  $\Delta t \gg T_0$ : ни один фотодетектор не успевает следить за изменениями светового поля, происходящими с частотой  $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Мы будем предполагать *инерционный способ регистрации*:  $\Delta t \gg \tau_0$ . Используя (2.34) и (2.32), имеем

$$\Gamma(\tau) = \overline{A(t)A^*(t+\tau)} e^{i\omega_0\tau} = \overline{a(t)a(t+\tau)} e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]} e^{i\omega_0\tau}. \quad (2.35)$$

Исследуем функцию  $\Gamma(\tau)$ . При  $\tau = 0$  получаем

$$\Gamma(0) = \overline{A(t)A^*(t)} = \overline{a^2(t)} = I_0$$

— значение функции когерентности при  $\tau = 0$  равно интенсивности. Будем далее полагать процесс излучения *стационарным*, т. е. считать, что ни интенсивность, ни функция когерентности не зависят от  $t$ , т. е. не зависят от положения интервала усреднения  $\Delta t$  в (2.34) на оси времени. Легко показать, что  $\Gamma(0) = I_0$  — *максимальное значение* функции когерентности. Нормированная функция

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{I_0} \quad (2.36)$$

называется *степенью временной когерентности*. При  $\tau = 0$   $\gamma(0) = 1$  — это максимальное значение степени когерентности.

Из (2.29) ясно, что при  $\tau \ll \tau_0$  (но  $\tau \gg T_0$ )

$$\Gamma(\tau) = \overline{a^2(t)} e^{i\omega_0\tau} = I_0 e^{i\omega_0\tau}.$$

При этом

$$\gamma(\tau) = e^{i\omega_0\tau} \quad \text{и} \quad |\gamma(\tau)| = 1. \quad (2.37)$$

Наконец, при  $\tau > \tau_0$ , как следует из (2.28):  $\overline{e^{i[\varphi(t)-\varphi(t+\tau)]}} \simeq 0$ , поэтому  $\Gamma(\tau) \simeq 0$ ,  $\gamma(\tau) \simeq 0$ .

Итак, мы видим, что поведение функции временной когерентности  $\Gamma(\tau)$  (и степени когерентности  $\gamma(\tau)$ ) соответствует нашим качественным представлениям о корреляции (когерентности) колебаний  $V(t)$  и  $V(t+\tau)$  при  $\tau \ll \tau_0$  (при этом  $\Gamma(\tau) \simeq \Gamma(0)$ ,  $\gamma(\tau) = 1$ ) и об отсутствии корреляции (когерентности) при  $\tau > \tau_0$  (при этом  $\Gamma(\tau) \simeq 0$ ,  $\gamma(\tau) \simeq 0$ ).

### 3.4. Интерференция и когерентность

Один из наиболее эффективных способов получения информации о статистических характеристиках излучения (в частности, о степени

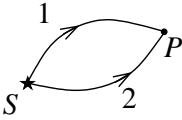


Рис. 2.8

временной когерентности) — измерение видности (контрастности) интерференционной картины в двухлучевой интерференционной схеме: излучение маленького («точечного») источника  $S$  приходит в точку наблюдения  $P$  по двум путям (двум «плечам») интерференционной схемы (рис. 2.8). Разность длин плеч  $\Delta$  (разность путей) приводит к относительному запаздыванию процессов колебаний  $V_1 = V(t)$  и  $V_2 = V(t + \tau)$  на время  $\tau = \Delta/c$ . Результат интерференции — интенсивность суммарного колебания — можно записать в виде

$$I(\tau) = \overline{|V(t) + V(t + \tau)|^2} = \overline{|V(t)|^2} + \overline{|V(t + \tau)|^2} + 2 \operatorname{Re} \overline{V(t)V^*(t + \tau)} \quad (2.38)$$

Если  $I_0 = \overline{|V(t)|^2} = \overline{|V(t + \tau)|^2}$  — равные интенсивности интерферирующих волн, то из (2.38) получаем

$$I(\tau) = 2I_0(1 + |\gamma(\tau)| \cos \omega_0 \tau) \quad (2.39)$$

(полагаем, что фаза функции когерентности равна нулю). Используя определение видности  $V$  (2.22), получаем

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma(\tau)|. \quad (2.40)$$

Измеряя видность интерференционных полос, отвечающих разным  $\tau = \Delta/c$ , мы измеряем степень временной когерентности  $|\gamma(\tau)|$ .

Если  $\tau \ll \tau_0$ , то  $\gamma(\tau) \approx e^{i\omega_0 \tau}$  и  $|\gamma(\tau)| = 1$ . Мы приходим к формуле  $I(\tau) = 2I_0(1 + \cos \omega_0 \tau)$ , которая совпадает с формулой (2.18), определяющей результат интерференции строго монохроматических волн. Тем самым, получен ответ на вопрос о применимости синусоидальной идеализации: при сложении когерентных волн всё происходит так, как если бы волны были строго монохроматическими.

При  $\tau \geq \tau_0$  волны становятся некогерентными:  $|\gamma(\tau)| \simeq 0$  — интенсивность  $I(\tau) = 2I_0$  равна сумме интенсивностей слагаемых волн. Отсюда следует оценка максимально допустимой для наблюдения интерференции оптической разности хода  $\Delta_{\max}$  волн:

$$\Delta_{\max} \simeq c\tau_0. \quad (2.41)$$

Величину  $c\tau_0$  называют длиной когерентности (это — длина цугов излучения источника).

### 3.5. Спектральный анализ

О свойствах квазимонохроматического излучения можно судить по спектральным измерениям, изучая с помощью какого-либо спектрального прибора распределение энергии излучения по частоте и получая тем самым величину  $J(\omega)$ , называемую спектральной интенсивностью. То есть величина  $J(\omega) d\omega$  есть интенсивность излучения на частоте  $\omega$  в бесконечно узкой полосе  $d\omega$ .

Заметим, что если излучение содержит две спектральные компоненты с частотами  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ , то фотоприемник зарегистрирует величину  $I = \overline{|a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{i(\omega + \Delta\omega)t}|^2}$  (интенсивности спектральных компонент  $I_1 = \overline{a_1^2}$  и  $I_2 = \overline{a_2^2}$ ). Мы получаем  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\omega t$ . Если время регистрации  $\Delta t \gg 2\pi/\Delta\omega$  (поскольку  $\overline{\cos \Delta\omega t} = 0$ ), то  $I = I_1 + I_2$ , т. е. регистрируемая интенсивность равна сумме интенсивностей спектральных компонент.

Сложение интенсивностей означает *некогерентность компонент разных частот*. Таким образом, результат интерференции при использовании квазимонохроматического источника можно рассчитать следующим образом: нужно взять отдельную монохроматическую (гармоническую) компоненту частоты  $\omega$ , интенсивности  $J(\omega)d\omega$  и найти результат двухлучевой интерференции, создаваемый этой компонентой:

$$dI = 2J(\omega) d\omega(1 + \cos \omega\tau). \quad (2.42)$$

Результирующая интерференционная картина представляет собой (*в силу некогерентности волн разных частот!*) сумму интенсивностей картин, созданных всеми спектральными компонентами, содержащимися в излучении источника:

$$I(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} J(\omega)(1 + \cos \omega\tau) d\omega. \quad (2.43)$$

Суммарная интенсивность  $I_0$  равна сумме интенсивностей всех спектральных компонент:

$$I_0 = \int_0^{+\infty} J(\omega) d\omega.$$

Рассмотрим два примера.

1. Спектральная интенсивность  $J(\omega)$  имеет вид «столбика» шириной  $\Delta\omega$  со средней частотой  $\omega_0$  (рис. 2.9)

$$J(\omega) = \begin{cases} J_0 & \text{при } |\omega - \omega_0| < \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при } |\omega - \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2}. \end{cases}$$

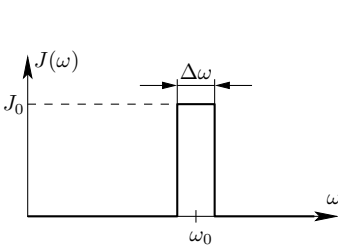


Рис. 2.9. Спектральная интенсивность

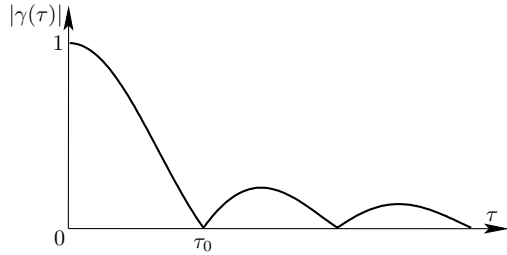


Рис. 2.10. Степень когерентности

Используя (2.43), находим

$$I(\tau) = 2 \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} J_0 (1 + \cos \omega\tau) d\omega = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0\tau \right], \quad (2.44)$$

где  $I_0 = J_0\Delta\omega$  — интенсивность каждой из интерферирующих волн. Из (2.44) получаем

$$V = |\gamma(\tau)| = \left| \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \right|. \quad (2.45)$$

Функция  $|\gamma(\tau)|$  показана на рис. 2.10. В качестве оценки за величину  $\tau_0$  можно принять первый ноль функции  $|\gamma(\tau)|$ :

$$\frac{\Delta\omega\tau_0}{2} = \pi, \quad \text{т. е.} \quad \tau_0\Delta\omega = 2\pi. \quad (2.46)$$

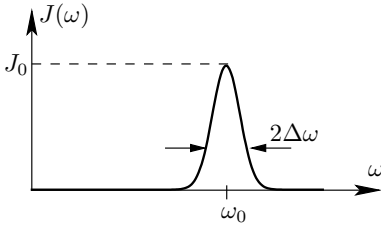


Рис. 2.11. Спектральная интенсивность

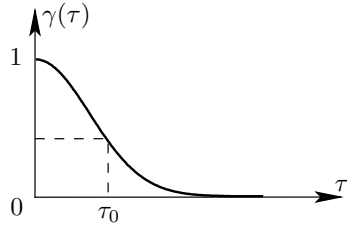


Рис. 2.12. Степень когерентности

2. Спектральная линия имеет гауссову форму (рис. 2.11):

$$J(\omega) = J_0 e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}}. \quad (2.47)$$

Используя (2.43), находим

$$I(\tau) = 2I_0 \left( 1 + e^{-\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)^2} \cos \omega_0\tau \right). \quad (2.48)$$

Видность  $\gamma(\tau) = e^{-\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)^2}$  показана на рис. 2.12. Время когерентности можно оценить из условия спадания видности в  $e$  раз:

$$\frac{\tau_0 \Delta\omega}{2} = 1. \quad (2.49)$$

Таким образом, видно, что в обоих приведённых примерах ширина спектральной линии оказывается порядка обратного времени когерентности.

### 3.6. Теорема Винера—Хинчина

Сравним формулы (2.38) и (2.43). В первой из них результат интерференции выражается через функцию когерентности. Перепишем её в виде

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \overline{V(t)V^*(t+\tau)} = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \Gamma(\tau). \quad (2.50)$$

Во второй формуле тот же результат интерференции выражается через спектральную интенсивность  $J(\omega)$ . Перепишем её в виде

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.51)$$

Сравнивая (2.50) и (2.51), приходим к фундаментальной связи между  $\Gamma(\tau)$  и  $J(\omega)$ : *функция когерентности  $\Gamma(\tau)$  является (обратным) преобразованием Фурье спектральной интенсивности  $J(\omega)$* :

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.52)$$

Соотношение (2.52) называется теоремой Винера—Хинчина.

Из этой теоремы следует, что ширина спектра излучения  $\Delta\omega$  (полоса частот, в которой заметно отлична от нуля спектральная интенсивность  $J(\omega)$ ) связана со временем когерентности  $\tau_0$  (интервалом времени  $\tau \leq \tau_0$ , в котором отлична от нуля функция когерентности  $\Gamma(\tau)$ ) соотношением неопределённостей:

$$\tau_0 \Delta\omega \simeq 2\pi. \quad (2.53)$$

Иллюстрацией этого факта являются два рассмотренных в предыдущем параграфе примера.

Используя соотношение неопределённостей, можно выразить максимально допустимую для наблюдения интерференции разность хода  $\Delta_{\max} = c\tau_0$  через ширину спектра излучения источника  $\Delta\omega$ :  $\Delta_{\max} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$  или, т.к.  $\omega = 2\pi c/\lambda$  и  $\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda$ , получить полезную оценку максимально допустимой разности хода волн и максимального наблюдаемого порядка интерференции  $m_{\max} = \Delta_{\max}/\lambda$ :

$$\Delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (2.54)$$

## 4. Пространственная когерентность

### 4.1. Степень пространственной когерентности

Пусть источником светового поля  $E(\mathbf{r}, t)$  в плоскости наблюдения  $\Pi$  является *протяжённый квазимонохроматический источник  $S$* , находящийся на расстоянии  $z$  (рис. 2.13). Колебания поля в точках  $P_1$  и  $P_2$  плоскости наблюдения запишем, как и ранее, в комплексной форме

$$V_1(t) = A_1(\mathbf{r}_1, t) e^{i\omega t}, \quad V_2(t) = A_2(\mathbf{r}_2, t) e^{i\omega t}$$

( $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — координаты точек  $P_1$  и  $P_2$ ).

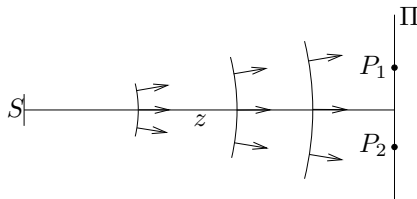


Рис. 2.13

Рассмотрим вопрос о когерентности колебаний  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$ . Каждый из колебательных процессов характеризуется временем когерентности  $\tau_0$ , т. е. в течение времени  $\tau \ll \tau_0$  (но много большем периода колебаний  $T_0$ ) амплитуды  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$ , а также фазы колебаний  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  сохраняются почти неизменными; сохраняется неизменной при этом и разность фаз  $\Delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ . По прошествии времени  $\tau_0$  амплитуды  $a_1$  и  $a_2$ , а также фазы колебаний принимают новые значения (скажем,  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$ ), которые некоррелированы со своими прежними значениями  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , т. е.  $\varphi_1$  с равной вероятностью имеет любое значение в интервале  $[0, 2\pi]$ , независимо от значения  $\varphi'_1$  спустя время  $\tau_0$ , то же самое касается и фазы  $\varphi_2$ . Однако возникает вопрос: *сохраняется ли неизменной (или почти неизменной) разность фаз  $\varphi'_1(t) - \varphi'_2(t) = \Delta\varphi'$ , т. е. выполняется ли равенство  $\Delta\varphi \simeq \Delta\varphi'$ ?* Другими словами, *изменяются ли фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  согласованно?* Если разность фаз, а также соотношения амплитуд  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  сохраняются неизменными (или почти неизменными) в течение всего времени регистрации  $\Delta t$  ( $\Delta t \gg \tau_0$ ), то тогда колебания в точках  $P_1$  и  $P_2$  будут когерентными (или почти когерентными). Если же через время  $\tau_0$  разность фаз  $\Delta\varphi'$  может принять с равной вероятностью любое значение, не зависящее от предшествующего значения  $\Delta\varphi$  ( $\tau_0$  секунд назад), то за время регистрации  $\Delta t \gg \tau_0$  разность фаз множество раз изменится, принимая с равной вероятностью любое значение в интервале  $[0, 2\pi]$ . В этом случае колебания в точках  $P_1$  и  $P_2$  окажутся некогерентными.

Рассмотрение колебаний в различных точках пространства позволяет ввести понятие пространственной когерентности. Количественной мерой пространственной когерентности является функция пространственной когерентности:

$$\Gamma_{12} = \overline{V_1(t)V_2^*(t)} = \overline{A_1(t)A_2^*(t)}, \quad (2.55)$$

которая зависит от расстояния между точками наблюдения. Нормиро-

ванная функция

$$\gamma_{12} = \frac{\overline{V_1(t)V_2^*(t)}}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (2.56)$$

называется степенью пространственной когерентности.

Вопрос о пространственной когерентности возникает, если источник является *протяжённым* — разные участки  $ds$  которого излучают некогерентно. Действительно, излучение разных участков — это излучение разных совокупностей атомов, моменты возникновения излучаемых ими цугов не связаны между собой, поэтому разность фаз излучаемых ими волн изменяется за время регистрации  $\Delta t \gg \tau_0$  множество раз, принимая с равной вероятностью любое значение в интервале  $[0, 2\pi]$ .

#### 4.2. Теорема Ван-Циттера—Цернике

Найдём колебания поля, созданного протяжённым квазимонохроматическим источником  $S$  в точках  $P_1(x_1)$  и  $P_2(x_2)$  плоскости наблюдения, находящейся на расстоянии  $z$  от источника — излучающего отрезка ширины  $b$  (рис. 2.14), расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$  равно  $\rho = |x_1 - x_2|$ . Колебания в каждой из точек  $P_1$  и  $P_2$  — это сумма колебаний, созданных всеми малыми отрезками  $\Delta\xi$  источника. Амплитуда  $a_i = a(\xi_i)$  колебаний излучающей площадки  $\Delta\xi_i$ , имеющей координату  $\xi_i$ , и её фаза  $\varphi_i = \varphi(\xi_i)$  сохраняются неизменными в течение времени, малом по сравнению со временем когерентности  $\tau_0$ . При распространении волны от площадки  $\Delta\xi_i$  до точек  $P_1$  и  $P_2$  возникает набег фазы  $kr_{1i}$  и  $kr_{2i}$  соответственно. Поэтому суммарное колебание в точках  $P_1$  и  $P_2$  можно записать в виде

$$A_1 = \sum_i a_i e^{i\varphi_i} \frac{e^{ikr_{1i}}}{r_{1i}}, \quad A_2 = \sum_j a_j e^{i\varphi_j} \frac{e^{ikr_{2j}}}{r_{2j}}.$$

$A_1$  и  $A_2$  — комплексные амплитуды (малая площадка излучает сферическую волну, отсюда множители  $1/r$ ). Мы получаем

$$A_1 A_2^* = \sum_i \sum_j a_i a_j e^{i(\varphi_i - \varphi_j)} \frac{e^{ik(r_{1i} - r_{2j})}}{r_{1i} r_{2j}}. \quad (2.57)$$

При усреднении величины  $A_1 A_2^*$  за время  $\Delta t \gg \tau_0$  учтём *некогерентность колебаний*, созданных разными площадками  $\Delta\xi_i$  и  $\Delta\xi_j$  (при  $i \neq j$ ):  $\overline{e^{i(\varphi_i - \varphi_j)}} = 0$ . Т. е. отличны от нуля в (2.57) только слагаемые с  $i = j$ :

$$\overline{A_1 A_2^*} = \sum_i \overline{a_i^2} \frac{e^{ik(r_{1i} - r_{2i})}}{r_{1i} r_{2i}}. \quad (2.58)$$



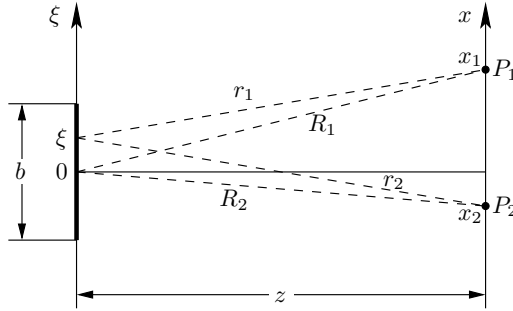


Рис. 2.14. К выводу функции пространственной когерентности

Далее мы учтём, что среднее значение квадрата амплитуды излучающей площадки  $\Delta\xi$  равно  $\overline{a^2(\xi)} = J(\xi)\Delta\xi$ , где  $J(\xi)$  — интенсивность излучения единичной площадки, имеющей координату  $\xi$  (интенсивность излучения площадки пропорциональна её размеру  $\Delta\xi$  — она состоит из некогерентных точечных излучателей!). Примем также, что размеры источника  $b$  и расстояние  $\rho$  малы по сравнению с  $z$ . В этом приближении можно положить  $\frac{1}{r_1 r_2} \approx \frac{1}{R_1 R_2}$  ( $R_1$  и  $R_2$  — расстояния от центра источника — точки  $O$  — до точек  $P_1$  и  $P_2$ ). При вычислении фазового множителя  $e^{ik(r_1 - r_2)}$  необходимо учесть дополнительный член в разложении  $r_1, r_2$  в ряд Тейлора, поскольку ошибки при оценке  $r_1$  и  $r_2$  должны быть малы по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Тогда запишем

$$r_{1,2} = \sqrt{z^2 + (x_{1,2} - \xi)^2} \approx z + \frac{(x_{1,2} - \xi)^2}{2z},$$

при условии, что отброшенные члены разложения много меньше  $\lambda$ . Отсюда имеем

$$r_1 - r_2 \approx \frac{x_1^2 - x_2^2}{2z} - \frac{\rho\xi}{z}.$$

Тогда из (2.58) находим

$$\Gamma(\rho) = \overline{V_1(t)V_2^*(t)} = \overline{A_1(t)A_2^*(t)} = \frac{e^{i\frac{k}{2z}(x_1^2 - x_2^2)}}{R_1 R_2} \sum_i J(\xi_i) e^{-i\frac{k}{z}\rho\xi_i} \Delta\xi_i.$$

Переходя к непрерывному распределению в пределе  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , получаем

$$\Gamma(\rho) = \frac{e^{i\frac{k}{2z}\rho x}}{R_1 R_2} \int J(\xi) e^{-i\frac{k}{z}\rho\xi} d\xi, \quad (2.59)$$

где  $x = (x_1 + x_2)/2$ . Нормированная функция (степень пространственной когерентности) имеет вид

$$\gamma(\rho) = \frac{\int J(\xi) e^{-i \frac{k}{z} \rho \xi} d\xi}{\int J(\xi) d\xi}. \quad (2.60)$$

Формула (2.59) выражает замечательный результат: *функция пространственной когерентности  $\Gamma(\rho)$  является (с точностью до несущественного множителя) преобразованием Фурье распределения интенсивности излучения по источнику  $J(\xi)$*  (это — так называемая теорема Ван-Циттера—Цернике). В роли частоты  $\omega$  здесь выступает пространственная частота  $\frac{k\rho}{z}$ .

### 4.3. Однородный источник

Для однородного источника (все точки которого излучают с одинаковой интенсивностью  $J_0$ ):

$$J(\xi) = \begin{cases} J_0 & \text{при } |\xi| \leq \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{при } |\xi| > \frac{b}{2}. \end{cases}$$

получаем из (2.60)

$$\gamma(\rho) = \frac{\sin \frac{kb}{2z} \rho}{\frac{kb}{2z} \rho}. \quad (2.61)$$

Функция  $|\gamma(\rho)|$  показана на рис. 2.15.

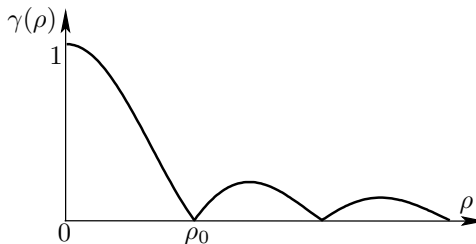


Рис. 2.15. Степень пространственной когерентности однородного источника в зависимости от расстояния между точками наблюдения

Найдём радиус пространственной когерентности  $\rho_0$  — максимальное расстояние между точками наблюдения, при котором степень когерентности не обращается в нуль. Его можно оценить по полуширине

главного максимума функции  $\gamma(\rho)$ :  $\frac{kb}{2z}\rho_0 = \pi$ , откуда

$$\boxed{\rho_0 = \frac{\lambda}{b}z = \frac{\lambda}{\psi}}, \quad (2.62)$$

где  $\psi = \frac{b}{z}$  — угловой размер источника.

Функция  $|\gamma(\rho)|$  описывает постепенное уменьшение степени когерентности от единицы при  $\rho = 0$  до нуля по мере увеличения расстояния между точками наблюдения  $P_1$  и  $P_2$ , при  $\rho = \rho_0$  степень когерентности становится равной нулю. Отметим однако, что наличие боковых лепестков функции  $\gamma(\rho)$  (рис. 2.15) означает частичное (незначительное) восстановление степени когерентности колебаний в точках, расстояние между которыми превышает  $\rho_0$ .

#### 4.4. Пространственная когерентность и апертура интерференции

Измерить степень пространственной когерентности колебаний в точках  $P_1$  и  $P_2$  можно «сведя» эти колебания с помощью двухлучевой интерференционной схемы в какую-либо точку плоскости наблюдения, например, так, как показано на рис. 2.16: проделаем в точках  $P_1$  и  $P_2$  маленькие отверстия в непрозрачном экране  $\Pi$ , расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$  равно  $\rho$ . Колебания поля в этих точках являются источниками волн справа от экрана  $\Pi$ . Эти волны, интерферируя, создадут на экране  $\mathcal{E}$  картину интерференции, видность которой позволит нам судить о степени когерентности колебаний в точках  $P_1$  и  $P_2$  (мы описали схему опыта Юнга). Результирующую картину интерференции найдём сложив интерференционные картины, образованные излучением всех малых (*некогерентных!*) площадок  $d\xi$  источника. Площадка  $d\xi_0$ , находящаяся в центре источника (в точке  $O$ ), создаёт в плоскости наблюдения  $\mathcal{E}$  картину интерференции

$$dI_0 = 2J_0 d\xi \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{l} x \right],$$

где  $J_0 d\xi$  — интенсивность одной из интерферирующих волн,  $l = \frac{\lambda}{\rho} z_1$  — ширина интерференционной полосы. Ясно, что нулевая полоса (соответствующая нулевой разности хода) находится на оси симметрии в точке  $O_1$ . Элемент источника, имеющий координату  $\xi$ , создаёт картину, смещённую на расстояние  $x_1 = \xi \frac{z_1}{z}$ . (Полагаем, что расстояния  $z_1$  и  $z$  велики по сравнению с размером источника и расстоянием  $\rho$  между

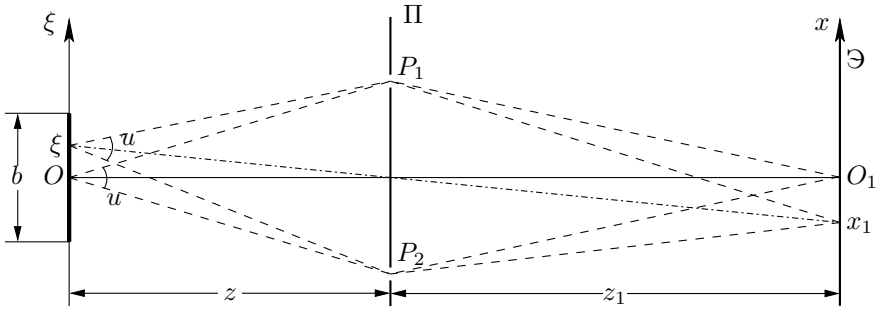


Рис. 2.16. Двухлучевая интерференционная схема с протяжённым источником

точками  $P_1$  и  $P_2$ ):

$$dI = 2J_0 d\xi \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{l} \left( x - \frac{z_1}{z} \xi \right) \right]. \quad (2.63)$$

Результирующую картину найдём суммированием (2.63) по всем площадкам  $d\xi$  источника. Интегрируя (2.63), получаем

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \left( \frac{\sin \pi \frac{\rho}{\rho_0}}{\pi \frac{\rho}{\rho_0}} \right) \cos \frac{2\pi}{l} x \right]. \quad (2.64)$$

Из (2.64) находим видность интерференционной картины, которая, как ясно из сравнения с (2.61), равна модулю пространственной степени когерентности:

$$V = |\gamma(\rho)| = \left| \frac{\sin \pi \frac{\rho}{\rho_0}}{\pi \frac{\rho}{\rho_0}} \right|. \quad (2.65)$$

Для оценки можно принять, что для наблюдения интерференции в опыте Юнга расстояние между отверстиями  $P_1 P_2 = \rho$  не должно превышать радиуса когерентности  $\rho_0$ . Из (2.62) находим  $\frac{\rho}{z} \leq \frac{\lambda}{b}$ .

Угол  $u = \frac{\rho}{z}$  между лучами, выходящими из какой-либо точки источника, которые затем сходятся в точке наблюдения (на экране, где наблюдается интерференция), называется **апертурой интерференции**. Итак, необходимое условие наблюдения интерференции (для любой интерференционной схемы):

$$\boxed{u \lesssim \frac{\lambda}{b}}. \quad (2.66)$$

Чем меньше апертура интерференции, тем большего размера источник можно использовать в данной интерференционной схеме.

#### 4.5. Локализация интерференционной картины

Из-за некогерентности и протяжённости источника света интерференционная картина имеет хорошую контрастность (видность) только в определённых областях пространства, т. е. интерференционная картина может быть *локализована*.

В качестве примера рассмотрим интерференцию на тонком воздушном клине, пренебрегая для простоты преломлением на поверхностях, образующих клин (рис. 2.17).

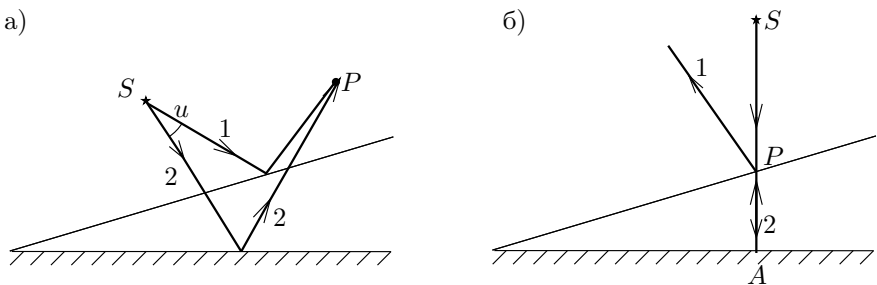


Рис. 2.17. Интерференция на клине (полосы равной толщины)

Для любых положений источника  $S$  и точки наблюдения  $P$  можно единственным образом построить два луча 1 и 2, исходящие из точки  $S$ , затем отражающиеся от верхней и нижней грани клина соответственно (рис. 2.17а) и сходящиеся в точке  $P$  (если точка наблюдения находится с противоположной стороны клина, в ней будут сходиться не сами лучи, а их продолжения). Каждому положению точки наблюдения соответствует определённая разность хода приходящих в неё лучей 1 и 2. Следовательно, интерференционную картину от *точечного* источника можно наблюдать во всех точках пространства, а интерференционные полосы при этом будут *не локализованы*.

С другой стороны, если источник  $S$  является *протяжённым*, то, как следует из изложенного в предыдущем параграфе, интерференцию можно будет наблюдать лишь в тех областях, в которых апертура интерференции  $u$  (угол между интерферирующими лучами, исходящими из  $S$ ) достаточно мала: согласно формуле (2.66), максимально допустимый размер источника равен  $\lambda/u$ .

*Максимальная видность* картины соответствует точкам наблюдения, для которых апертура интерференции равна нулю  $u = 0$ . Это-

му условию удовлетворяют точки, находящиеся на поверхности клина, как проиллюстрировано на рис. 2.17б. Интерференционные полосы, локализованные на поверхности клина (или, например, тонкой плёнки), называют **полосами равной толщины**. Такое название связано с тем, что разность хода интерферирующих лучей определяется оптической толщиной клина в точке наблюдения  $P$  (на рис. 2.17б она равна  $2PA$  и постоянна вдоль ребра клина).

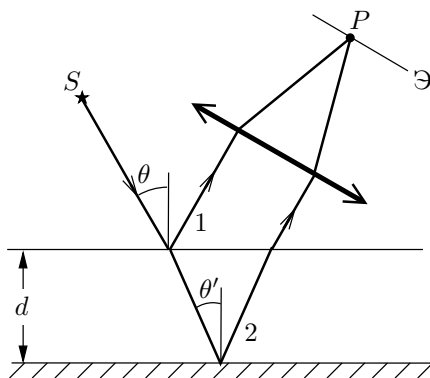


Рис. 2.18. Интерференция на пластине постоянной толщины (полосы равного наклона)

Плоскопараллельная пластина даёт возможность наблюдать интерференционные полосы, локализованные на бесконечности. На рис. 2.18 они наблюдаются в фокальной плоскости линзы. Такие полосы называют **полосами равного наклона**, поскольку каждой интерференционной полосе соответствует определённый угол наклона падающего луча  $\theta$  и определённая разность хода  $2d \cos \theta'$ . Контраст картины для полос равного наклона не зависит от размеров источника, поскольку, как нетрудно видеть из рис. 2.18, апертура интерференции равна нулю.

## 5. Интерферометры

Измерительные приборы, использующие явление интерференции, называют **интерферометрами**. Оптические интерферометры применяются в физических экспериментах для измерения длин волн спектральных линий, показателей преломления прозрачных сред, абсолютных и относительных длин, для контроля качества оптических деталей и их поверхностей. По числу интерферирующих пучков интерферометры разделяются на два класса — **многолучевые** и **двухлучевые**. В данном разделе мы рассматриваем двухлучевую интерференцию. Принцип ра-

боты всех двухлучевых интерферометров одинаков: свет от источника разделяется на два пучка, идущих по двум различным путям. Затем эти пучки сводятся вместе, появляющаяся интерференционная картина исследуется с помощью регистрирующего прибора или визуально.

Вид интерференционной картины зависит от способа получения когерентных пучков, оптической разности хода, относительной интенсивности, размеров источника, спектрального состава света. Получают когерентные пучки двумя способами — делением волнового фронта и делением амплитуды.

В первом способе пучок делится, проходя через два близко расположенных отверстия (как, например, в опыте Юнга). Метод деления волнового фронта прост в реализации, его недостаток — большая апертура интерференции, и как следствие — небольшая интенсивность, поскольку источник должен иметь малые размеры.

Второй способ — деление амплитуды — реализуется, когда пучок делится на одной или нескольких частично отражающих поверхностей. Деление амплитуды может применяться при работе с протяжёнными источниками, что обеспечивает большую интенсивность картины (например, в интерферометрах Жамена и Майкельсона).

### 5.1. Интерферометр Релея

В интерферометре Юнга, использующем метод деления волнового фронта, на экран попадает лишь малая доля светового потока от источника. Этот недостаток можно устранить, если поставить линзу после экрана с двойной щелью и наблюдение вести в точке, сопряжённой с источником света. Дальнейшие усовершенствования данной схемы привели к созданию получившего широкое распространение *интерферометра Релея* (рис. 2.19).

В этой схеме в качестве источника используют узкую щель  $S$  (шириной  $b$ ), освещаемую сколлимированным светом от лампочки  $L$ . Щель расположена в фокальной плоскости объектива  $O_1$ . После экрана  $D$  с двойной щелью два параллельных пучка проходят через щели 1 и 2 и попадают на объектив  $O_2$ , в фокальной плоскости которого рассматривается интерференционная картина. Для обеспечения когерентности пучков 1 и 2 ширина входной щели  $S$  выбирается так, чтобы радиус когерентности на экране  $D$  был больше расстояния между щелями 1 и 2. На экране  $F$  рассматривается дифракционное изображение щели  $S$ , ширина изображения определяется шириной одной щели на экране  $D$ . Если интерференция рассматривается в белом свете, ширина щелей на экране  $D$  выбирается в 2–3 раза меньше расстояния между ними, так что в центральном максимуме видно 5–7 интерференционных полос.

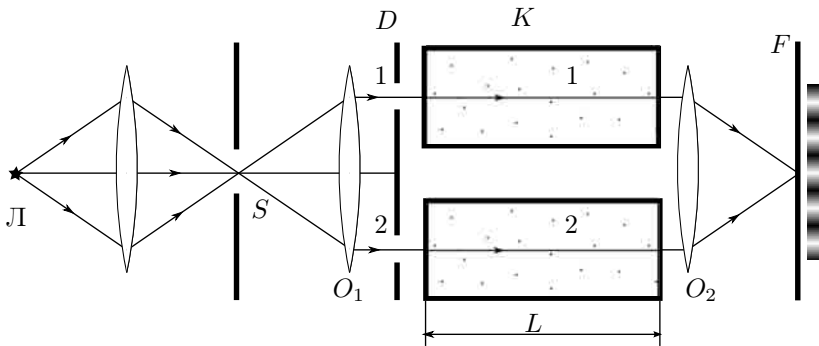


Рис. 2.19. Схема интерферометра Релея

Для более точного измерения смещения полос из-за изменения коэффициента преломления в одном из плеч в интерферометре Релея используют две интерференционные картины. Верхняя часть пучков 1 и 2 проходит через кюветы  $K$  с газом. Нижняя часть, проходящая под кюветами, образует в фокальной плоскости объектива  $O_2$  неподвижную интерференционную картину. Для отдельного рассмотрения каждой системы полос (пучки света 1 и 2 параллельны и системы полос в фокальной плоскости совпадают) используют окуляр с цилиндрической линзой, которая пространственно разделяет эти системы полос. При заполнении кювет газами с одинаковыми коэффициентами преломления обе системы полос (верхняя и нижняя) совпадают. Различие коэффициентов преломления газов в кюветах приводит к смещению верхней системы полос относительно нижней из-за возникновения между лучами 1 и 2 оптической разности хода  $\Delta = L(n_2 - n_1)$  ( $L$  — длина кювет). По числу полос между центрами обеих картин можно рассчитать изменение коэффициента преломления  $n$ .

**Зависимость показателя преломления газа от давления и температуры.** Воспользуемся известной формулой диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  для газа невзаимодействующих диполей:

$$\varepsilon = n^2 = 1 + 4\pi N\alpha,$$

где  $N$  — концентрация молекул,  $\alpha$  — поляризуемость молекулы (в ед. СГС). Эта формула справедлива для разреженных газов, и коэффициент преломления их мало отличается от единицы. Учитывая зависимость давления  $P$  газа от температуры  $P = Nk_B T$ , где  $k_B$  —



константа Больцмана, получим соотношение

$$n - 1 \approx \frac{\alpha}{2k_B T} P.$$

Тогда для разности показателей преломления  $\delta n = n_2 - n_1$ , измеряемой с помощью интерферометра Релея, и разности давлений  $\delta P$ , измеряемой с помощью манометра, имеем простое соотношение:

$$\delta n = \frac{\alpha}{2k_B T} \delta P. \quad (2.67)$$

## 5.2. Интерферометр Жамена

Получить два плеча интерферометра можно делением амплитуды на толстой плоскопараллельной пластине. Большую разность хода можно компенсировать использованием второй такой же пластины (рис. 2.20). Впервые такую интерференцию наблюдал Брюстер. Эти полосы обычно называют полосами Брюстера. В быту их можно наблюдать на многих оконных стеклопакетах.

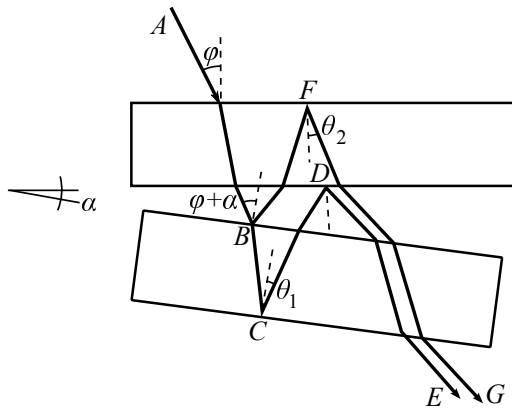


Рис. 2.20. Схема наблюдения полос Брюстера

Пластины располагаются под небольшим углом  $\alpha$ . Свет от источника  $A$  последовательно проходит через две пластины, частично отражаясь. Интерferируют лучи  $E$  и  $G$  с минимальной разностью хода, показанные на рис. 2.20. Разность хода этих лучей (без учёта разности хода в воздухе) равна  $2nd(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$ , где  $d$  — толщина пластин,  $n$  — их показатель преломления. Обозначим угол падения луча на первую пластину  $\varphi$ , тогда на вторую луч падает под углом  $\alpha + \varphi$ . Для малых

углов условие максимума

$$2nd(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \approx 2dn \left( \frac{\varphi^2}{2n^2} - \frac{(\varphi + \alpha)^2}{2n^2} \right) = \frac{2\alpha d}{n} \left( \varphi + \frac{\alpha}{2} \right) = m\lambda. \quad (2.68)$$

В данном случае мы наблюдаем полосы равного наклона. Из (2.68) можно выразить угловое расстояние между полосами:

$$\delta\varphi = \varphi_{m+1} - \varphi_m = \frac{\lambda n}{2\alpha d}.$$

Подобная схема применяется в интерферометре Жамена, где для исключения разности хода в воздухе интерферирующие пучки между пластинами идут перпендикулярно бисекторной плоскости, а сами пластины располагаются под углом  $45^\circ$  к падающему свету (рис. 2.21). Полосы равного наклона будут наблюдаться в этом случае как полосы, параллельные ребру двугранного клина, образованного пластинами (разности хода при прохождении в воздухе не будет). Присутствие лучей 1 и 4 ухудшает чёткость интерференционной картины, поэтому их устраняют с помощью диафрагм.

Так как наблюдаются полосы равного наклона, протяжённый источник располагают в фокусе коллиматора, а полосы наблюдают в телескоп. Для идеальных плоскопараллельных пластин в трубе будет видно геометрическое изображение источника, а на нем будут видны полосы, ширина которых будет зависеть от угла  $\alpha$  между пластинами.

При наблюдении в белом свете центральная полоса оказывается ахроматичной; она окружена двумя глубокими минимумами. Если труба наблюдения горизонтальна, нулевая полоса оказывается в центре поля зрения при горизонтальной ориентации клина. При повороте одной из пластин вокруг горизонтальной оси, параллельной оси клина, изменяется ширина интерференционных полос, как в рассмотренной системе полос Брюстера. Если повернуть зеркало вокруг вертикальной оси, меняется ориентация клина, нулевая полоса смещается вверх или вниз.

Расстояние между двумя плечами интерферометра Жамена будет зависеть от толщины пластин, и для достаточно толстых пластин в одно из плеч интерферометра можно поставить кювету с газом, коэффициент преломления которого можно измерить по смещению интерференционных полос. Допустимая клиновидность толстых пластин определится дифракционной расходимостью пучка света в каждом плече. Проверить клиновидность пластин можно, уменьшив угол между ними  $\alpha$  до нуля. Если при этом в поле зрения будет видно не более двух

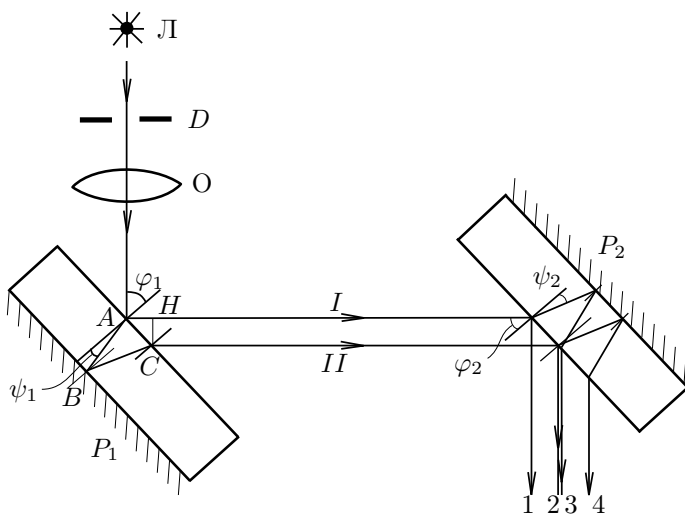


Рис. 2.21. Ход лучей в интерферометре Жамена

полос равной толщины, пластины хорошие. При достаточно толстых пластинах (около 2–3 см) в каждое из двух плеч интерферометра можно поставить кюветы с газом (как в интерферометре Релея) для измерения малых изменений коэффициента преломления газов.

### 5.3. Интерферометр Майкельсона

Схема интерферометра приведена на рис. 2.22. В этом интерферометре когерентные волны получают методом деления амплитуды при использовании полупрозрачного зеркала ПП. Интерференционная картина наблюдается в плоскости экрана Э. Источником света является точка, получающаяся за счёт фокусировки лазерного излучения с помощью дополнительной линзы. В данной схеме интерференции требуется большая временная когерентность, поэтому используется лазерный источник излучения.

Картина интерференции на экране Э может быть построена следующим образом. Отражаясь в зеркалах ПП,  $Z_1$  и  $Z_2$ , источник  $S$  даёт два изображения  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 2.22). Если зеркало  $Z_2$  не перпендикулярно падающему лучу 2,  $S_2$  переходит в  $S'_2$ . То есть *интерференцию*

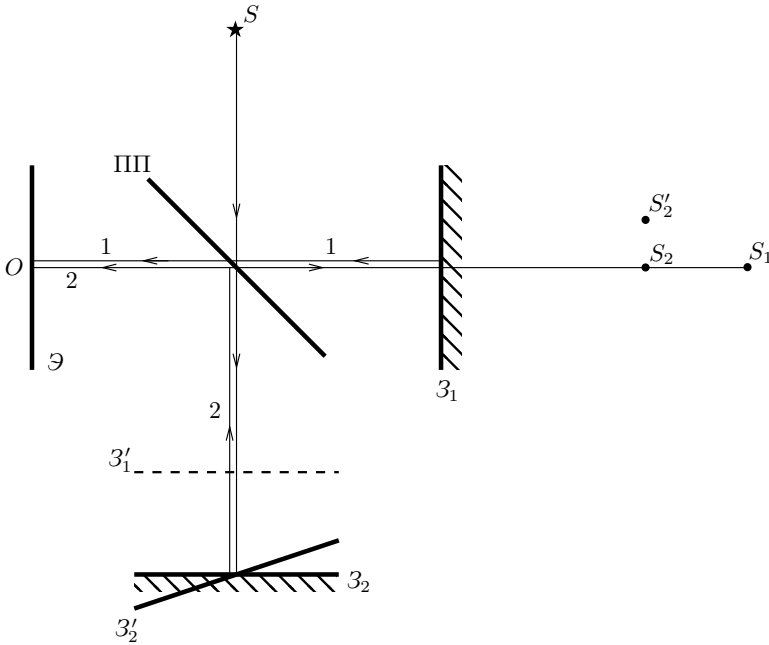


Рис. 2.22. Схема интерферометра Майкельсона

на экране можно рассматривать как интерференцию от двух точечных источников.

Если экран расположен перпендикулярно линии, соединяющей два источника, линиями равной разности фаз будут окружности

$$\sqrt{L^2 + r_n^2} - \sqrt{(L - a)^2 + r_n^2} \approx a + \frac{r_n^2 a}{2L(L - a)} = \text{const},$$

где  $r_n$  — радиус окружности,  $a$  — расстояние между изображениями источника  $S$ , а  $L$  — расстояние от  $S_1$  до экрана.

Интенсивность в центре картины ( $r = 0$ ) определяется величиной  $a$ , равной разности хода между лучами 1 и 2. Порядок интерференции в центре равен  $m_0 = \frac{a}{\lambda}$ . Если в центре имеется максимум, тогда радиус  $n$ -го интерференционного кольца, отсчитанного от центра, будет определяться формулой

$$r_n \approx \sqrt{\frac{2nL(L - a)}{m_0}}, \quad (2.69)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . При больших  $n$  расстояние между полосами будет равно

$$\Delta r \approx \sqrt{\frac{L(L-a)}{2nm_0}}.$$

При малом повороте зеркала  $Z_2$  изображение источника  $S_2$  переходит в  $S'_2$ . Если от центра экрана изображения источников будут видны под углом  $\beta$ , то в центре будут видны полосы, ширина которых согласно (2.25) приближенно равна  $\lambda/\beta$ .

По интерференционной картине можно определять длину волны источника света. При движении зеркала  $Z_1$  к экрану (зеркало  $Z_2$  установлено без наклона) разность хода со временем уменьшается, интерференционные кольца стягиваются к центру, как бы исчезая в нём. При смещении зеркала на расстояние  $l$  в центре исчезнет  $N = 2\frac{l}{\lambda}$  колец. При равномерном перемещении зеркала, если за время  $T$  зарегистрировано исчезновение  $N$  колец, скорость перемещения зеркала равна

$$v = \frac{\lambda N}{2T}. \quad (2.70)$$

Для более точного рассмотрения необходимо воспользоваться релятивистскими формулами для эффекта Доплера. Учтём, что в системе координат, связанной с зеркалом  $Z_1$ , движущимся со скоростью  $v$ , частота излучения источника  $\omega_1$  отличается от исходной  $\omega_0$ , так что  $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ . Эта волна отражается от неподвижного зеркала и попадает на движущийся (в системе зеркала) приёмник. Частота приёма будет равна  $\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \omega_0 \frac{c+v}{c-v}$ . В центре экрана колебания  $\omega_0$  и  $\omega_2$  складываются, и регистрируемая интенсивность меняется с частотой  $\Delta\omega = \frac{2v}{c-v}\omega_0$ . Число периодов колебаний за время  $t$  равно

$$N = \frac{\Delta\omega t}{2\pi} = 2\frac{vt}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}.$$

Для небольших скоростей эта формула совпадает с (2.70).

#### 5.4. Кольца Ньютона

Этот классический опыт используется для определения радиуса кривизны сферических поверхностей линз. В этом опыте наблюдается интерференция волн, отражённых от границ тонкой воздушной прослойки, образованной сферической поверхностью линзы и плоской

стеклянной пластиной. При нормальном падении света (рис. 2.23) интерференционные полосы локализованы на сферической поверхности и являются *полосами равной толщины*.

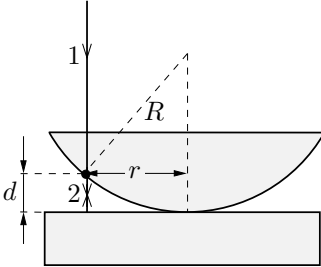


Рис. 2.23. Схема наблюдения колец Ньютона

Геометрическая разность хода между интерферирующими лучами равна удвоенной толщине воздушного зазора  $2d$  в данном месте. Для точки на сферической поверхности, находящейся на расстоянии  $r$  от оси системы, имеем  $r^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2$ , где  $R$  — радиус кривизны сферической поверхности (рис. 2.23). При  $R \gg d$  получим  $d = r^2/2R$ . С учётом изменения фазы на  $\pi$  при отражении волны от оптически более плотной среды (на границе воздух—стекло) получим *оптическую разность хода* интерферирующих лучей:

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}.$$

Условие интерференционного минимума  $\Delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), откуда получаем для радиусов тёмных колец

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}. \quad (2.71)$$

Аналогично для радиусов  $r'_m$  светлых колец

$$r'_m = \sqrt{(2m - 1)m\lambda R/2}. \quad (2.72)$$

### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. IV. Оптика. — М.: Физматлит, 2005. Гл. III.
2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курсы общей физики: учебн. в 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 3, гл. 7.
3. Ландсберг Г.С. Оптика. — М.: Физматлит, 2003. Гл. IV, VI, VII.
4. Бутиков Е.И. Оптика. — М.: Высшая школа, 1986. Гл. 5.
- 5\* Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973. Гл. 7, 10.