

Давление P , существующее в жидкости, обусловлено ее сжатием. Поскольку касательные напряжения отсутствуют, упругие свойства жидкости (газа) характеризуются лишь одной упругой константой — коэффициентом сжимаемости

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$$

или обратной ему величиной — модулем всестороннего сжатия

$$K = -V \frac{dP}{dV}.$$

Предполагается, что температура жидкости (газа) поддерживается постоянной.

Уравнение Бернулли. Картина течения жидкости определена, если для каждой ее частицы известно положение в пространстве в каждый момент времени. По изменению положения во времени можно найти скорость и ускорение частицы. Каждая частица может быть отмечена ее координатами x_0, y_0, z_0 в момент времени t_0 . Координаты частицы в момент времени t можно найти, если заданы функции

$$\begin{aligned} x &= F_1(x_0, y_0, z_0, t), \\ y &= F_2(x_0, y_0, z_0, t), \\ z &= F_3(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned}$$

Эта система уравнений называется уравнениями Лагранжа, а аргументы функций — переменными Лагранжа. Для полной характеристики состояния движущейся жидкости необходимо знать еще давление, плотность, температуру, которые определяются из законов сохранения импульса и энергии и уравнения состояния.

Существует и другой способ описания течения, который указывает, что происходит в каждой точке пространства в каждый момент времени. Обычно задаются три проекции скорости в зависимости от координат и времени

$$\begin{aligned} u &= f_1(x, y, z, t), \\ v &= f_2(x, y, z, t), \\ w &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Эту систему уравнений называют уравнениями Эйлера. Для определения траектории какой-нибудь частицы надо проинтегрировать систему из трех уравнений:

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt.$$

Так как три постоянные интегрирования можно рассматривать как координаты частицы в некоторый начальный момент времени, то приходим к уравнениям Лагранжа.

Наглядное представление о мгновенной картине течения жидкости дают так называемые линии тока, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точках касания. При установившемся течении, когда картина течения со временем не изменяется, линии тока совпадают с траекториями частиц.

В случае стационарного течения все частицы жидкости, проходящие через некоторую точку пространства, будут двигаться в дальнейшем по одной и той же линии. Область течения, границами которой являются линии тока, называется трубкой тока. Для вывода уравнений, описывающих течение, удобно рассмотреть трубку тока с очень малой площадью поперечного сечения. Малость определяется тем, что можно пренебречь изменением параметров течения поперек трубки тока. Обозначая плотность жидкости ρ , скорость течения v и площадь сечения трубки тока S , для расхода q жидкости, то есть массы жидкости, проходящей через данное сечение за единицу времени, получаем

$$q = \rho v S. \quad (3.11)$$

Из закона сохранения массы жидкости, протекающей по трубке тока, для различных сечений одной и той же трубки тока имеем

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (3.12)$$

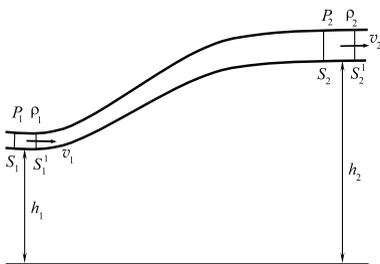


Рис. 3.6. К выводу уравнения Бернулли

В законе сохранения энергии будем учитывать изменение кинетической и потенциальной энергии жидкости за счет работы сил давления, но не будем учитывать изменение тепловой энергии, связанное со сжимаемостью, вязкостью и теплопроводностью. Жидкость, при течении которой можно пренебрегать вязкостью и теплопроводностью, называется идеальной. На рис. 3.6 представлен разрез участка трубки тока вертикаль-

ной плоскостью, то есть плоскостью, в которой лежит сила тяжести. На рисунке указаны высоты, на которых находятся сечения 1 и 2, и соответствующие параметры течения. За бесконечно малое время dt частицы жидкости смещаются на бесконечно малое расстояние $v dt$.

Частицы жидкости, находившиеся в сечении S_1 , перейдут в сечение S_1^1 , а частицы из S_2 — в S_2^1 . Из-за малости смещений изменением величин площадей при смещении пренебрегаем. Работа сил давления по перемещению массы жидкости, находящейся между сечениями S_1 и S_2 , складывается из положительной работы $p_1 S_1 v_1 dt$ и отрицательной (сила направлена против перемещения) работы $p_2 S_2 v_2 dt$. При подсчете изменения потенциальной и кинетической энергии учтем, что энергия жидкости, находящейся между сечениями S_1^1 и S_2^1 , не меняется, а изменение связано как бы с переходом массы, находившейся между сечениями S_1 и S_1^1 , $dm = \rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt$ в положение между сечениями S_2 и S_2^1 . Используя закон сохранения массы в выражении для работы сил давления и приравнявая эту работу изменению потенциальной и кинетической энергии, имеем

$$\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) dm = dm \left(g(h_2 - h_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right). \quad (3.13)$$

Отсюда получаем уравнение Бернулли:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho_2} = \text{const}. \quad (3.14)$$

Сжимаемость жидкостей при нормальных условиях обычно мала. Например, для воды увеличение плотности на 1% требует давления более 200 атмосфер (такое давление создается на глубине 2 км), а для увеличения плотности на 10% — свыше 3000 атмосфер. Поэтому при небольших давлениях воду считают несжимаемой жидкостью. Тогда вместо (3.12) и (3.14) можно написать

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (3.15)$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2. \quad (3.16)$$

С помощью уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости (3.16) можно получить формулу Торричелли для скорости истечения струи жидкости из отверстия в сосуде. Считаем, что площадь отверстия намного меньше площади свободной поверхности жидкости в сосуде, то есть скоростью жидкости на свободной поверхности можно пренебречь по сравнению со скоростью истечения жидкости из отверстия. Струе жидкости, вытекающей из отверстия, соответствует трубка тока, начинающаяся на свободной поверхности. Давление в вытекающей струе равно атмосферному, так как граница струи, вытекающей в атмосферу,

неподвижна, т. е. на нее не действует сила. На свободной поверхности жидкости давление тоже равно атмосферному. Если отверстие находится ниже свободной поверхности жидкости на h , то из (3.16) для скорости истечения струи получаем

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.17)$$

Отметим, что величина скорости не зависит от ее направления (от направления нормали к площади отверстия). Величина $\rho v^2/2$ называется скоростным напором или динамическим давлением и равна объёмной плотности кинетической энергии. Из (3.17) следует, что она равна гидростатическому давлению ρgh . Полное давление в неподвижной жидкости на этой глубине в покоящейся жидкости получим, если добавим атмосферное давление.

Формула Пуазейля. В соответствии с уравнением Бернулли при стационарном течении по прямолинейной горизонтальной трубе постоянного сечения давление жидкости должно быть одним и тем же по всей длине трубы. В действительности, однако, давление жидкости в трубе падает в направлении ее течения. Для обеспечения стационарности течения необходимо поддерживать на концах трубы постоянную разность давлений, уравнивающую силы внутреннего трения, которые возникают при течении жидкости.

Рассмотрим две параллельные пластины, между которыми находится слой жидкости. Для поддержания равномерного движения пластин необходимо к одной из них приложить силу \vec{F} , а к другой — силу $-\vec{F}$. Еще Ньютоном экспериментально было установлено, что величина этих сил

$$F = \eta S \frac{v_2 - v_1}{h}, \quad (3.18)$$

где S — площадь пластины, h — расстояние между пластинами, v_1 , v_2 — скорости пластин, η — коэффициент вязкости (сокращенно его называют просто вязкостью).

Сила трения между слоями вязкой жидкости зависит от изменения скорости в перпендикулярном потоку направлении (закон Ньютона для вязкой жидкости):

$$F = S\eta \frac{dv_x}{dy}. \quad (3.19)$$

Пусть вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль прямолинейной цилиндрической трубы радиусом R . Координатную ось x направим вдоль оси трубы в сторону течения. Выделим в трубе произвольную

бесконечно короткую цилиндрическую часть длиной dx и радиусом r (рис. 3.7).

На боковую поверхность выделенного цилиндра в направлении, противоположном движению, действует касательная сила вязкого трения:

$$dF = 2\pi r \eta \frac{dv}{dr} dx.$$

На основания цилиндра в направлении движения действует сила разности давлений:

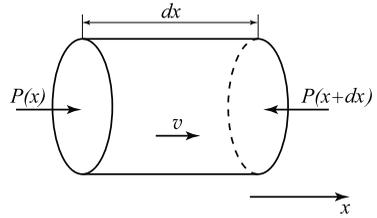


Рис. 3.7. К выводу формулы Пуазейля

$$dF_1 = \pi r^2 (P(x) - P(x + dx)) = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx.$$

Линии тока рассматриваемого течения параллельны, площадь сечения трубок тока остается постоянной, и из (3.15) получаем, что при стационарном течении ускорение выделенного объема жидкости должно быть равно нулю. Следовательно, должна быть равна нулю сумма действующих на этот объем сил:

$$dF + dF_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx}. \quad (3.20)$$

Так как скорость v , а с ней и dv/dr не зависят от x , производная dP/dx в (3.20) должна быть постоянной, равной

$$\frac{P_2 - P_1}{l},$$

где P_1 — давление на входе трубы, P_2 — давление на выходе трубы. В результате имеем

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r. \quad (3.21)$$

Интегрируя, находим

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

Постоянную интегрирования определяем из условия прилипания жидкости к стенке трубы:

$$v(R) = 0.$$

Это дает

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Скорость v максимальна на оси трубы, где она достигает значения

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2.$$

При удалении от оси скорость меняется по параболическому закону.

Определим расход жидкости, т. е. количество жидкости, протекающее в единицу времени через поперечное сечение трубы. Масса жидкости, протекающая в единицу времени через кольцевую площадку с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$, равна $dQ = 2\pi r dr \cdot \rho v$. Подставляя сюда выражение для скорости и интегрируя от нуля до R , находим искомый расход жидкости:

$$Q = \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$

или

$$Q = \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4. \quad (3.22)$$

Таким образом, расход жидкости пропорционален разности давлений, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине трубы и коэффициенту вязкости жидкости. Эти закономерности экспериментально установил Пуазейль. Формулу (3.22) поэтому принято называть формулой Пуазейля, хотя сам Пуазейль не является ее автором.

На практике расход жидкости удобно измерять в единицах объема жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение. Формула (3.22) при этом имеет вид

$$Q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (P_1 - P_2). \quad (3.23)$$

В таком виде формула используется в лабораторной работе 1.3.3.

Течение несжимаемой вязкой жидкости в общем случае описывается уравнением Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (3.24)$$

Здесь

$$\text{grad}P = \vec{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}.$$

Это уравнение можно привести к безразмерному виду, если ввести характерный размер течения L и характерную скорость u . Роль каждого члена в таком уравнении определяет коэффициент, стоящий перед ним. Роль члена, учитывающего вязкость, по сравнению с членами в левой стороне, учитывающими инерционность, определяется величиной так называемого числа Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho L u}{\eta}.$$

При больших числах Рейнольдса коэффициент перед членом, определяющим влияние вязкости, мал, и вязкостью можно пренебречь. Число Рейнольдса определяет также переход вязкого ламинарного течения в турбулентное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. X и XII.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8.

Работа 1.3.1

Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения и изгиба

Цель работы: экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба; по результатам измерений вычислить модуль Юнга.

В работе используются: в первой части — прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка; во второй части — стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величины прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линейка, штангенциркуль.

В первой части работы производят растяжение проволоки, и это соответствует случаю одноосного напряженного состояния, описываемого формулой (3.1). Во второй части работы измерения производят

- начальную амплитуду следует уменьшать до тех пор, пока не будет достигнуто равенство этих периодов.
2. Убедитесь в том, что после десяти периодов колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем в два раза.
 3. Установите грузы на стержне на одинаковом расстоянии l от оси системы (провода) до центра масс каждого груза и измерьте период колебаний T . Проведите измерения для 4–6 различных значений l . Величину модуля кручения можно найти из наклона прямой линии, проведенной по экспериментальным точкам, отложенным в координатах l^2, T^2 .
 4. Измерьте длину и диаметр проволоки П. По найденному модулю кручения с помощью формулы (7) получите модуль сдвига G , оцените погрешность и сравните с табличными значениями в справочниках.

Контрольные вопросы

1. Как трение в осях блоков Б влияет на результаты измерений статическим методом? Как можно уменьшить это влияние?
2. Как меняется период колебаний при увеличении их затухания?
3. Какой метод предпочтительнее на практике: статический или динамический?
4. Как оценить погрешность измерения модуля кручения при определении его из графика в координатах l^2, T^2 ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 78,79.
2. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 82, 84, 86.

Работа 1.3.3

Определение вязкости воздуха по скорости течения через тонкие трубки

Цель работы: экспериментально выявить участок сформированного течения, определить режимы ламинарного и турбулентного течения; определить число Рейнольдса.

В работе используются: металлические трубки, укрепленные на горизонтальной подставке; газовый счетчик; микроманометр типа ММН; стеклянная U-образная трубка; секундомер.

Рассмотрим движение вязкой жидкости или газа по трубке круглого сечения. При малых скоростях потока движение оказывается ламинарным (слоистым), скорости частиц меняются по радиусу и направлены вдоль оси трубки. С увеличением скорости потока движение

становится турбулентным, и слои перемешиваются. При турбулентном движении скорость в каждой точке быстро меняет величину и направление, сохраняется только средняя величина скорости.

Характер движения газа (или жидкости) в трубке определяется безразмерным числом Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{vr\rho}{\eta}, \quad (1)$$

где v — скорость потока, r — радиус трубки, ρ — плотность движущейся среды, η — ее вязкость. В гладких трубках круглого сечения переход от ламинарного движения к турбулентному происходит при $\text{Re} \approx 1000$.

При ламинарном течении объем газа V , протекающий за время t по трубе длиной l , определяется формулой Пуазейля (3.23):

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8l\eta}(P_1 - P_2). \quad (2)$$

В этой формуле $P_1 - P_2$ — разность давлений в двух выбранных сечениях 1 и 2, расстояние между которыми равно l . Величину Q обычно называют расходом. Формула (2) позволяет определять вязкость газа по его расходу.

Отметим условия, при которых справедлива формула (2). Прежде всего необходимо, чтобы с достаточным запасом выполнялось неравенство $\text{Re} < 1000$. Необходимо также, чтобы при течении не происходило существенного изменения удельного объема газа (при выводе формулы удельный объем считался постоянным). Для жидкости это предположение выполняется практически всегда, а для газа — лишь в тех случаях, когда перепад давлений вдоль трубки мал по сравнению с самим давлением. В нашем случае давление газа равно атмосферному (10^3 см вод. ст.), а перепад давлений составляет не более 10 см вод. ст., т. е. менее 1% от атмосферного. Формула (2) выводится для участков трубки, на которых закон распределения скоростей газа по сечению не меняется при движении вдоль потока.

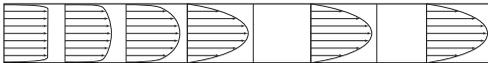


Рис. 1. Формирование потока газа в трубе круглого сечения

При втекании газа в трубку из большого резервуара скорости слоев вначале постоянны по всему сечению (рис. 1). По мере продвижения газа по трубке

картина распределения скоростей меняется, так как сила трения о стенку тормозит прилежащие к ней слои. Характерное для ламинарного течения параболическое распределение скоростей устанавливается на

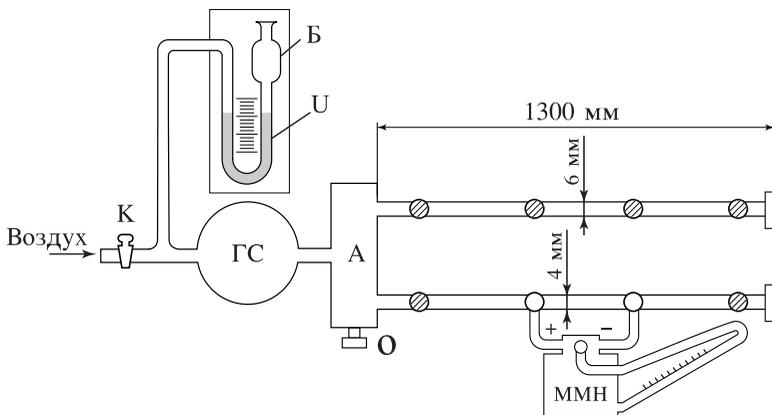


Рис. 2. Схема установки для определения вязкости воздуха

некотором расстоянии a от входа в трубку, которое зависит от радиуса трубки r и числа Рейнольдса по формуле

$$a \approx 0,2r \cdot \text{Re}. \quad (3)$$

Градиент давления на участке формирования потока оказывается бóльшим, чем на участке с установившимся ламинарным течением, что позволяет разделить эти участки экспериментально. Формула (3) дает возможность оценить длину участка формирования.

Экспериментальная установка. Измерения производятся на экспериментальной установке, схема которой изображена на рис. 2. Поток воздуха под давлением, несколько превышающим атмосферное (на 5–7 см вод. ст.), через газосчётчик ГС поступает в резервуар А, к которому припаяны тонкие металлические трубки. Примерные размеры трубок указаны на рисунке (точные размеры обозначены на установке). Обе трубки на концах снабжены заглушками, не пропускающими воздух. Во время измерений заглушка открывается только на рабочей трубке; конец другой трубки должен быть плотно закрыт.

Перед входом в газосчётчик поставлена U-образная трубка, наполовину заполненная водой. Она выполняет две задачи. Первая — измерение давления газа на входе в газосчётчик. Вторая — предохранение газосчётчика от выхода из строя. Дело в том, что газосчётчик устойчиво работает, если давление газа на его входе не превышает 600 мм водяного столба. Высота U-образной трубки примерно 600 мм, поэтому, когда давление на входе в счётчик превышает 600 мм водяного столба,

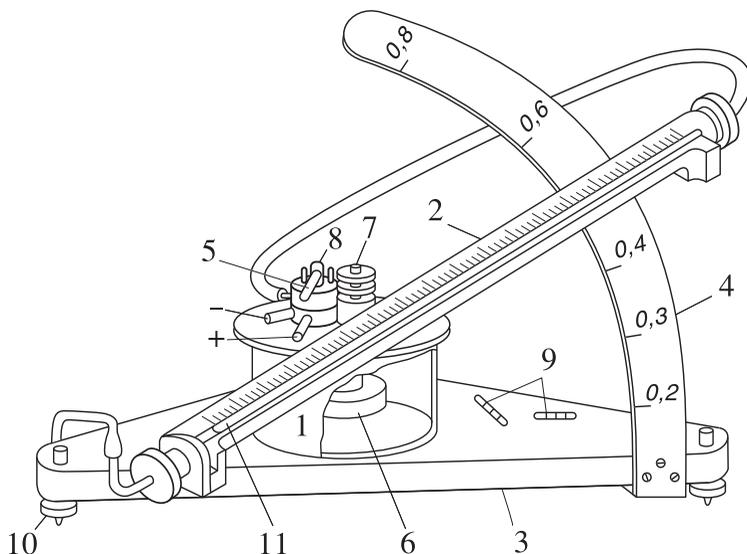


Рис. 3. Микрометрический манометр типа ММН

вода из U-образной трубки выплёскивается в защитный баллон Б и, создавая шум, привлекает к себе внимание экспериментатора. Такая ситуация часто создаётся в тех случаях, когда газ подают в систему при закрытых выходах измерительных трубок.

Для измерения давлений в трубках просверлен ряд миллиметровых отверстий. На время опыта к двум соседним отверстиям подсоединяется микроманометр, а остальные плотно закрываются заворачивающимися пробками. Подача воздуха в установку регулируется краном К.

В работе применяется *микроманометр* типа ММН (рис. 3), позволяющий измерять разность давлений до 200 мм вод. ст. Для повышения чувствительности трубка манометра установлена в наклонном положении. Числа 0,2; 0,3; 0,4; 0,6 и 0,8, нанесенные на стойке 4, обозначают коэффициент, на который должны быть умножены показания манометра при данном наклоне, для получения давления в миллиметрах водяного столба. Рабочей жидкостью является этиловый спирт. Установка мениска жидкости на нуль шкалы производится путем изменения уровня спирта в сосуде 1 с помощью цилиндра 6. Глубина погружения цилиндра в спирт регулируется винтом 7.

Микроманометр снабжен двумя уровнями 9, расположенными на плите 3 перпендикулярно один другому. Установка прибора по уровням производится двумя регулировочными ножками 10.

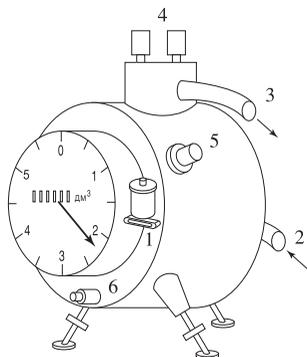


Рис. 4. Внешний вид газового счетчика

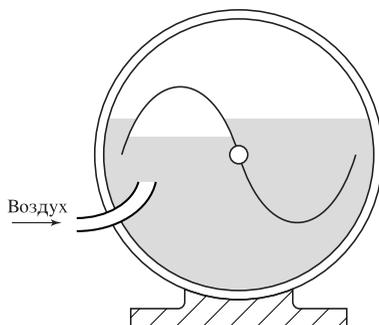


Рис. 5. Схема устройства газового счетчика

На крышке прибора установлен трехходовой кран 8, который имеет два рабочих положения — «0» и «+» (рис. 3). В положении «0» мениск жидкости устанавливается на ноль. В положении «+» производятся рабочие измерения. Перевод из положения «0» в положение «+» и наоборот осуществляется с помощью рычажка 5 (рис. 3). При этом учитывается, что в резервуаре уровень жидкости практически не меняется.

Газовый счетчик служит для измерения небольших количеств газа. Внешний вид его изображен на рис. 4. Корпус газового счетчика представляет собой цилиндрический баллон, на передней торцевой стенке которого находятся счетно-суммирующий механизм и шкала со стрелкой. Один оборот стрелки соответствует 5 л газа, прошедшего через счетчик.

Газовый счетчик заливается водой до уровня, определяемого по водомерному устройству 1. Трубка 2 для входа газа расположена сзади счетчика, а трубка 3 для выхода газа — наверху счетчика. Патрубки 4 предназначены для присоединения U-образного манометра, а патрубок 5 — для установки термометра. Кран 6 служит для слива воды. Счетчик снабжен уровнем и регулировочными ножками для правильной установки.

Принцип работы счетчика пояснен на рис. 5. На оси, проходящей по осевой линии цилиндра, жестко укреплены легкие чаши (для упрощения чертежа на рисунке изображены только две чаши). В чашу, находящуюся над трубкой 2, поступает воздух. Когда чаша наполняется воздухом, она всплывает, ее место занимает следующая, и т. д. Вращение оси передается счетно-суммирующему устройству.

ЗАДАНИЕ

1. Подготовьте установку к работе: установите приборы по уровням, проверьте наличие воды в газовом счетчике по водомерному устройству, установите на нуль мениск микроманометра. Полный объём измерения проведите на одной из трубок (лучше на трубке $d = 4$ мм).
2. По формуле (3) оцените расстояние, на котором происходит формирование потока при ламинарном течении. Расчет проведите для $Re = 1000$.
3. Подсоедините микроманометр к двум соседним выводам выбранной трубки на участке со сформировавшимся потоком. Отвинтите пробку на конце этой трубки; все остальные выводы на трубках должны быть плотно завинчены пробками, снабженными резиновыми прокладками.
4. Медленно открывая кран К (рис. 2) и впуская воздух в установку, внимательно следите за показаниями микроманометра. При больших перепадах давления спирт может вылиться из микроманометра через трубку 11.

Чаще всего это нежелательное явление происходит при измерениях на тонких трубках. Спирт заливает не только резиновую трубку, соединяющую манометрическую трубку 11 с трёхходовым краном, но может попасть и в трубку, соединённую с (-). В резиновых соединительных трубках остаются капли жидкости, которые приводят к тому, что $\Delta P = P_1 - P_2$ измеряется неправильно. Поэтому перед измерениями (и после того, как спирт попадает в трубки) необходимо убедиться в том, что капелек в соединительных трубках нет. Их присутствие можно обнаружить по резким скачкам столбика в манометрической трубке 11, происходящим при осторожном перемещении соединительных трубок. В этом случае трубки надо снять и просушить.

5. Измерьте вязкость воздуха. Для этого снимите зависимость разности давлений ΔP от расхода воздуха $Q = \Delta V / \Delta t$, при этом ΔV измеряется газовым счетчиком, а Δt — секундомером. Установите множитель на стойке 4 равным 0,2. Начинать надо с малых перепадов давлений (2–3 мм вод. ст.), постепенно увеличивая расход Q . В диапазоне от 0 до 100 дел. по шкале 2 (рис. 3) должно быть не менее 5–6 точек замера. Это необходимо для того, чтобы заведомо попасть в режим ламинарного течения. После этого замеры можно проводить реже, но в более широком диапазоне по давлению, чтобы попасть в турбулентный режим. По полученным данным постройте график $\Delta P = f(Q)$. Из формулы (2) видно, что при ламинарном потоке зависимость ΔP от Q должна быть линейной. При возникновении турбулентности линейность графика нарушается: разность давлений растёт быстрее, чем расход.

6. По угловому коэффициенту прямолинейного участка графика определите вязкость воздуха η . Оцените погрешность определения этого коэффициента и вычислите ошибку полученного значения вязкости.
7. Вычислите значение числа Рейнольдса Re для переходной области между ламинарным и турбулентным течениями.
8. При расходе, заведомо обеспечивающем ламинарность потока, измерьте распределение давления вдоль трубки. Для этого микроманометр последовательно подсоедините ко всем ее выводам, включая и вывод «0» (рис. 2). Постройте график зависимости давления от длины вдоль трубки $P = f(l)$. Из графика оцените длину участка, на котором происходит установление потока. Сравните найденный результат с результатом, вычисленным по формуле (3).
9. Для всех трубок на участках со сформированным течением (в конце трубок) в ламинарном режиме ($Re < 500$) снимите зависимости $Q = f(P)$. Обработайте результаты по формуле

$$\frac{8l\eta Q}{\pi(P_1 - P_2)} = r^n.$$

Постройте график в двойном логарифмическом масштабе, т. е. по оси ординат отложите $\ln(8l\eta Q/\pi(P_1 - P_2))$, а по оси абсцисс — $\ln r$. Нетрудно увидеть, что тангенс угла наклона полученной прямой должен дать значение n , т. е. показатель степени, который по формуле Пуазейля должен быть равен 4. Проверьте, выполняется ли это. Оцените ошибку измерений.

Контрольные вопросы

1. Какой формулой описывается профиль скорости ламинарного потока в трубке? Как соотносятся средняя по сечению и максимальная скорости?
2. Что такое число Рейнольдса? Как его можно определить из экспериментальных данных?
3. Как графически надо обрабатывать результаты измерений по п. 8, чтобы из них достоверно было видно различие участков со сформированным и несформированным течениями?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. §§ 96, 97.
2. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. Гл. XVI, § 125.
3. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.Л., Лифшиц Е.М.* Механика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1969. Гл. XV, §§ 117–119.
4. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. Гл. XII, § 111.

Работа 1.3.4

Исследование стационарного потока жидкости в трубе

Цель работы: измерить скорости течения по методам Пито и Вентури, а также сравнить результаты со скоростью, определенной по расходу воды.

В работе используются: расходомерная установка, секундомер.

В работе исследуется течение жидкости по трубе постоянного сечения.

Основной целью исследования потока жидкости или газа в трубе является определение скорости движения и расхода, то есть количества среды, — объема или массы, — протекающей в единицу времени. Правильное определение расхода очень важно в прикладных задачах — в газо- и нефтепроводах, а также в водопроводе и при теплоснабжении.

Ввиду важности приложений было разработано много разных способов определения расхода и скорости потока жидкости или газа, но самые простые и в то же время точные основаны на измерении перепада давления, связанного либо с положением приемников — навстречу или вдоль потока (как в трубке Пито), либо вызванного специальным препятствием — типа сужения трубы (как в трубке Вентури) или установкой внутри трубы шайбы — кольца.

Расходомер Вентури (рис. 1) представляет собой горизонтальную трубу с плавно меняющимся сечением. В широком (сечение S_1) и узком (сечение S_2) участках сделаны выходы к трубкам водяного манометра M_1 . Высота поднятия воды в трубках манометра определяет давление в соответствующих сечениях.

В силу несжимаемости жидкости ($v_1 S_1 = v_2 S_2$) и горизонтальности трубы ($z_1 = z_2$) из уравнения Бернулли (3.14) получаем скорость потока в сечении S_1 через давления в сечениях S_1 и S_2 :

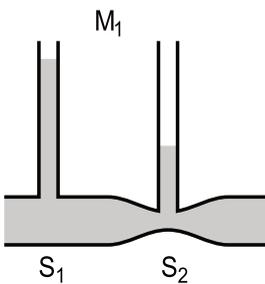


Рис. 1. Расходомер Вентури

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho [(S_1/S_2)^2 - 1]}}. \quad (1)$$

Расходомер Пито изображен на рис. 2. С исследуемой трубой Т соединены две трубки водяного манометра M_2 . Одна из них (1) подведена к стенке трубы Т, а другая (2) изогнута и направлена открытым концом навстречу потоку. Перед отверстием трубы 2 жидкость неподвижна, $v_2 = 0$.

Пусть давления, измеренные манометрическими трубками 1 и 2, равны p_1 и p_2 . Уравнение Бернулли (3.14) дает $p_1 + \rho v_1^2/2 = p_2$, откуда

$$v_1 = \sqrt{2(p_2 - p_1)/\rho}. \quad (2)$$

Уравнение (2) позволяет связать скорость жидкости с разностью высот в трубках манометра M_2 .

С помощью трубки Пито измеряется локальная скорость потока в месте расположения трубки. Но в методе Вентури измеряется лишь средняя скорость по сечению трубы. Если нужно измерить только расход, то можно применить метод Вентури, в котором расход вычисляется по некоторой усредненной по сечению трубы скорости. Когда требуется определить скорость потока, то нужно использовать трубку Пито. Чаще такая необходимость возникает не при измерениях в трубе, а при исследовании внешнего потока. Трубка Пито применяется в самом широком диапазоне скоростей — от измерений медленных движений в вязком пограничном слое и до измерений сверхзвуковых скоростей на самолетах.

При использовании трубопроводов всегда важно знать объем или массу среды, протекающей за единицу времени. Измерения осложняются влиянием вязкости, из-за которой и жидкость, и газ «прилипают» к стенке, около которой скорость равна нулю. Поэтому в трубе скорость всегда изменяется вдоль радиуса, всегда увеличивается в той или иной степени по направлению от стенки к оси трубы. Если исследуется установившееся движение при относительно малых числах Рейнольдса, то применима формула Пуазейля, и в таком случае достаточно измерить скорость в одной точке, например, на оси трубы. В других случаях для правильного определения расхода требуется проинтегрировать скорость по площади, для чего нужно произвести измерения в нескольких точках. Например, в книге Т.Е. Фабера «Гидроаэродинамика» рекомендуется использовать 20 трубок Пито, размещенных на разных расстояниях от оси трубы по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

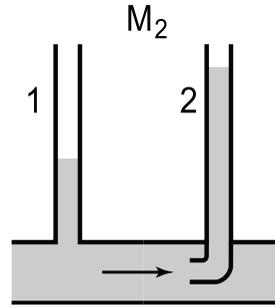


Рис. 2. Расходомер Пито

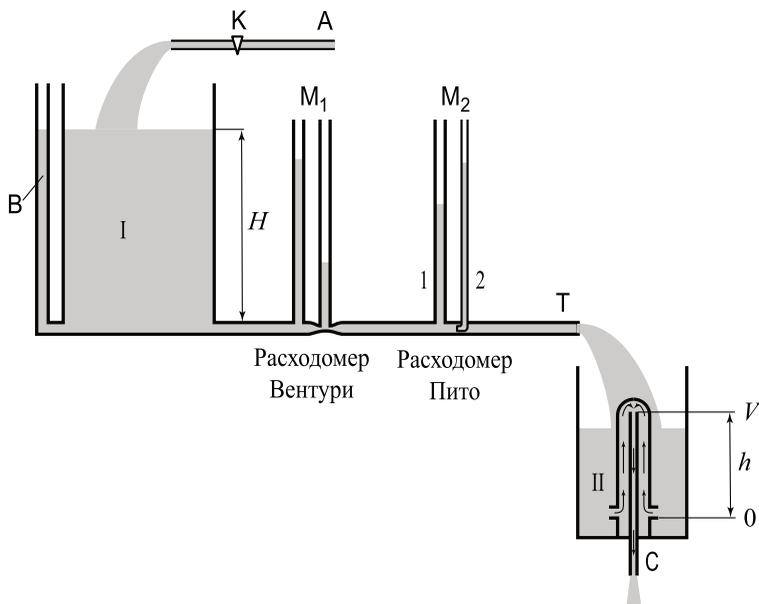


Рис. 3. Схема установки для исследования стационарного потока жидкости в трубе

К физическим методам определения расхода жидкости или газа относится ультразвуковой расходомер. Этот способ основан на том, что в движущейся среде звук, который распространяется относительно среды с постоянной скоростью, движется вместе с ней, и поэтому в направлении движения жидкости или газа скорость звука больше, а против — меньше, чем в покоящейся среде. Излучатель и приемник ультразвука устанавливаются на противоположных стенках канала или трубы с определенным сдвигом вдоль оси, так что ультразвук распространяется под некоторым углом к направлению скорости потока. Поэтому скорость в направлении движения больше, а в противоположном направлении меньше, чем в неподвижной среде. Разница между ними с учетом угла определяет скорость потока, при этом даже не нужно знать скорости звука. Преимущество ультразвукового расходомера в том, что его работа не зависит от вязкости среды. Однако в таких условиях измеряется некоторая средняя скорость на пути звукового луча, поэтому для точных измерений прибор нуждается в градуировке. При этом градуировка будет зависеть в том числе и от числа Рейнольдса, так как от него зависит профиль скорости среды.

Отметим также турбинный расходомер, в котором расход пропорционален числу оборотов турбинки. Однако его показания сильно зависят от вязкости среды.

Экспериментальная установка. Схема установки, служащей для исследования течения воды в трубе, изображена на рис. 3. Вода поступает в трубу Т из цилиндрического резервуара I, снабженного водомерной трубкой В из стекла. Наполнение резервуара производится из водопровода по трубе А и регулируется краном К. Выливающаяся из трубы Т вода попадает в приемный резервуар II, в дно которого вмонтирован сифон С.

Сифон предохраняет резервуар от переполнения, автоматически выливая из него воду, как только ее уровень достигнет высоты h . Труба Т снабжена расходомерами Вентури и Пито.

Скорость течения, усредненную по сечению трубы, можно определить по расходу, который находится по измеренному времени наполнения резервуара II, объем которого задан. С другой стороны, скорость может быть рассчитана по показаниям манометров с помощью формул (1) и (2). Сопоставление этих скоростей со скоростью, определенной по расходу, позволяет сделать вывод о применимости уравнения Бернулли, роли вязкости, которая, в частности, приводит к изменению скорости поперек потока. Сопоставление скоростей удобно провести на графике, по оси абсцисс которого отложена скорость по расходу при разных уровнях воды в баке, а по оси ординат — соответствующие скорости по расходомерам Вентури и Пито. Для идеальной жидкости эта зависимость представляла бы прямую линию под углом 45° к оси, проходящую через начало координат.

О влиянии вязкости можно судить и по уровням воды в баке и двух манометрических трубках, присоединенных к стенкам трубы. В случае идеальной жидкости уровни в манометрических трубках должны совпадать с уровнем воды в баке. Вязкость вызывает падение уровня вдоль течения.

До сих пор предполагалось, что жидкость идеальная и потерь на трение при ее движении в трубе Т не происходит. Для количественной оценки роли вязкости необходимо сделать следующий эксперимент. Установив уровень жидкости в резервуаре I на определенной высоте z_1 , измерить скорость течения жидкости по трубе Т с помощью приемного резервуара II (в силу несжимаемости жидкости ее скорость на входе в трубу Т и на выходе из нее одинакова). По измеренному значению скорости по формуле Торричелли рассчитать ту высоту z_2 , при которой жидкость вытекала бы с этой же скоростью в отсутствие вязкости.

Разность $z_1 - z_2$ характеризует потери на внутреннее трение в жидкости, причем можно считать, что эти потери происходят только в трубе Т, так как скорость жидкости в резервуаре I существенно меньше.

Влияние вязкости изменяет показания манометра Вентури Δh на величину, которую можно оценить, умножив разность $z_1 - z_2$ на отношение расстояния между входами манометра Δl ко всей длине трубы L . При условии

$$\Delta h \gg (z_1 - z_2) \frac{\Delta l}{L}$$

неидеальностью жидкости в пределах манометра М можно пренебречь. В противном случае (Δh сравнимо с $(z_1 - z_2) \frac{\Delta l}{L}$) в уравнении (1) из $p_1 - p_2$ необходимо вычесть $\Delta z \frac{\Delta l}{L} \rho g$.

Все сказанное относится и к расходомеру Пито. Кроме этого, для трубки Пито следует сделать оценку поправки к его показаниям, вызванную конечностью размеров вставленной в поток частью изогнутой трубки 2.

При измерениях очень важно обеспечить стационарность течения жидкости. Это достигается тем, что уровень воды в резервуаре I при каждом измерении с помощью крана К должен поддерживаться на одной и той же высоте H . Для удобства рядом с водомерной трубкой имеется миллиметровая шкала. Перед началом измерений следует проверить, хорошо ли работают манометры (не засорены ли трубки).

ЗАДАНИЕ

1. Налейте немного воды в бак (резервуар I). При закрытой пробкой трубе Т убедитесь, что уровни воды в трубках манометров совпадают с уровнем в баке. Если это не так, найдите и устраните причину.
2. Для каждого уровня воды в баке (резервуар I) H , от малых уровней (~ 1 см) до больших, а затем снова до малых, добейтесь стационарного течения воды в трубе Т, что обеспечивается неизменностью уровня воды в баке, и проведите несколько раз измерение времени t заполнения резервуара II. Оцените погрешность измерения времени. Для каждого уровня H запишите также показания манометров расходомеров Вентури и Пито.
3. По времени t заполнения резервуара II, его объему V_0 и заданной площади сечения S_1 трубы Т вычислите скорость течения воды по расходу $v_p = V_0 / (tS_1)$. Оцените погрешность величины скорости.
4. Измерьте длину L всей трубы Т, а также Δl манометров Вентури и Пито.
5. Постройте зависимость квадрата скорости v_p^2 от уровня воды в баке H . На графике отметьте погрешности определения величин. Здесь же

постройте зависимость высоты, рассчитанной по формуле Торричелли $z_2 = v^2/(2g)$, от квадрата скорости. Совпадают ли полученные зависимости? В чем причина расхождений?

6. По показаниям расходомеров Вентури и Пито с помощью формул (1) и (2) вычислите значения скоростей v_B и v_P с поправкой на потери и без нее. Оцените погрешности этих величин. Сравните эти скорости со скоростью v_p , определенной по расходу, отложив их на графике в зависимости от v_p . Как скажутся на характере построенного графика погрешности в величине сечений S_1 и S_2 , входящих в формулу (1), а также сужение сечения в области, где впаина трубка 2 расходомера Пито?
7. Постройте график зависимости v_p от H . По графику определите участки ламинарного и турбулентного течения. Для точки перехода ламинарного течения в турбулентное определите число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{v_p r \rho}{\eta},$$

где ρ — плотность жидкости, r — радиус трубы Т, η — коэффициент вязкости жидкости (для воды $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/м · с).

Контрольные вопросы

1. При каких предположениях получено уравнение Бернулли?
2. В какую сторону изменяет показания расходомеров Пито и Вентури наличие вязкости?
3. При каких уровнях воды H в резервуаре 1 течение в трубе Т ламинарное, а при каких — турбулентное?
4. В некотором опыте происходит ламинарное течение жидкости по трубе. Как будет изменяться течение, если использовать все менее вязкую жидкость, оставляя неизменными диаметр трубы, скорость течения и плотность жидкости?
5. При каком течении — турбулентном или ламинарном — получается лучшее согласие скорости, определенной по расходомерам Пито и Вентури, со скоростью, найденной с помощью резервуара П?
6. Выведите формулу Торричелли. Используя формулу Торричелли, оцените скорости вытекания воды из очень короткой трубы при разных уровнях H . Почему реальные скорости вытекания из длинной трубы значительно меньше?
7. В расходомерах Пито и Вентури оцените разницу уровней воды Δh в левых измерительных трубках (рис. 3), присоединенных к трубе Т в местах одинакового сечения. Как можно объяснить наличие разницы давлений? Какие получатся результаты, если с помощью линейного экстраполирования попытаться найти давления на концах трубы Т?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. — М.: Наука, 1996. Гл. XII, §§ 93, 94, 95.
2. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. Гл. XVI, §§ 123, 124.
3. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1975. §§ 100–106.
4. *Кингсен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8. §§ 8.3, 8.4, 8.5, 8.6.
5. *Фабер Т.Е.* Гидроаэродинамика. — М.: Постмаркет, 2001.