

# Теплоёмкость идеального газа в различных термодинамических процессах

В.С. Булыгин

27 февраля 2014 г.

С помощью 1-го начала термодинамики для  $\nu$  молей идеального газа:

$$\delta Q = dU + \delta A = \nu C_V dT + P dV,$$

где  $C_V$  — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, а давление  $P$ , объём  $V$  и абсолютная температура  $T$  связаны уравнением Клапейрона–Менделеева

$$PV = \nu RT \quad (1)$$

получаем выражение для теплоёмкости  $\nu$  молей идеального газа

$$C \equiv \frac{\delta Q}{dT} = \nu C_V + \frac{P dV}{dT}. \quad (2)$$

После дифференцирования (1):  $d(PV) = \nu R dT$  находим:

$$P dV + V dP = \nu R dT, \quad (3)$$

откуда

$$P dV = \nu R dT - V dP,$$

что с помощью (2) и соотношения Майера  $C_P = C_V + R$  даёт ещё одно выражение для теплоёмкости  $\nu$  молей идеального газа:

$$C = \nu C_V + \nu R - \frac{V dP}{dT} = \nu C_P - V \frac{dP}{dT}. \quad (4)$$

Получим из этих соотношений выражения для теплоёмкости  $\nu$  молей идеального газа для всех возможных типов равновесных процессов.

## Процесс $V = V(T)$

Из выражений (2) и (1) следует:

$$C(T) = \nu C_V + P \frac{dV}{dT} = \nu \left[ C_V + \frac{RT}{V} \frac{dV}{dT} \right] = \nu \left[ C_V + RT \frac{d(\ln V)}{dT} \right] = \nu \left[ C_V + R \frac{d(\ln V)}{d(\ln T)} \right]. \quad (5)$$

## Процесс $T = T(V)$

Из 2-й части выражения (5) получаем:

$$C(V) = \nu \left[ C_V + \frac{RT}{V} \frac{dT}{dV} \right] = \nu \left[ C_V + \frac{R}{V} \frac{dT}{dV} \right] = \nu \left[ C_V + R \left( \frac{d(\ln T)}{d(\ln V)} \right)^{-1} \right]. \quad (6)$$

## Процесс $P = P(T)$

Из выражений (4) и (1) следует:

$$C(T) = \nu \left[ C_P - \frac{RT}{P} \frac{dP}{dT} \right] = \nu \left[ C_P - RT \frac{d(\ln P)}{dT} \right] = \nu \left[ C_P - R \frac{d(\ln P)}{d(\ln T)} \right]. \quad (7)$$

## Процесс $T = T(P)$

Из 1-й части выражения (7) получаем:

$$C(P) = \nu \left[ C_P - \frac{RT}{P} \frac{dP}{dT} \right] = \nu \left[ C_P - \frac{R}{P} \frac{d(\ln T)}{dP} \right] = \nu \left[ C_P - R \left( \frac{d(\ln T)}{d(\ln P)} \right)^{-1} \right]. \quad (8)$$

## Процесс $P = P(V)$

Из выражения (3), переписанного в виде

$$\left( 1 + \frac{V}{P} \frac{dP}{dV} \right) P dV = \nu R dT,$$

находим выражение для элементарной работы идеального газа:

$$P dV = \frac{\nu R dT}{1 + \frac{V}{P} \frac{dP}{dV}},$$

подстановка которого в (2) даёт искомое выражение для теплоёмкости в этом процессе:

$$C(V) = \nu \left[ C_V + \frac{R}{1 + \frac{V}{P} \frac{dP}{dV}} \right] = \nu \left[ C_V + \frac{R}{1 + V \frac{d(\ln P)}{dV}} \right] = \nu \left[ C_V + \frac{R}{1 + \frac{d(\ln P)}{d(\ln V)}} \right]. \quad (9)$$

## Процесс $V = V(P)$

Из 1-й части выражения (9) получаем:

$$C(P) = \nu \left[ C_V + \frac{R}{1 + \frac{V}{P} \frac{dP}{dV}} \right] = \nu \left[ C_V + \frac{R}{1 + \left( P \frac{d(\ln V)}{dP} \right)^{-1}} \right] = \nu \left[ C_V + \frac{R}{1 + \left( \frac{d(\ln V)}{d(\ln P)} \right)^{-1}} \right]. \quad (10)$$

С помощью полученных выражений найдём решения задач на нахождение теплоёмкости идеальных газов, взятых из задачника [1].

- В задаче 1.47:  $P = \text{const} \cdot V$ , в задаче 1.54:

$$P = P_0 + \frac{F_{\text{ymp}}}{S_{\perp}} = P_0 + \frac{k_{\text{ymp}} \frac{V-V_0}{S_{\perp}}}{S_{\perp}} = P_0 + \frac{P_0 S_{\perp}^2}{V_0} \frac{V - V_0}{S_{\perp}^2} = \frac{P_0}{V_0} V,$$

т. е. снова  $P = \text{const} \cdot V$ . Так как  $\ln P = \ln \text{const} + \ln V$ , то  $\frac{d(\ln P)}{d(\ln V)} = 1$  и из (9) при  $\nu = 1$  следует ответ:

$$C = C_V + \frac{R}{2}.$$

Соответственно в задаче 1.53, где также  $P \sim V$  и  $C_V = \frac{5R}{2}$  получаем:

$$C = C_V + \frac{R}{2} = \frac{5R}{2} + \frac{R}{2} = 3R.$$

- В задаче 1.49:  $\nu = 1$ ,  $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$ , где  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ ;  $P = \frac{P_0}{V_0}(V_0 - V)$ ,  $\frac{dP}{dV} = -\frac{P_0}{V_0}$ ,  $\frac{V}{P} = \frac{VV_0}{P_0(V_0-V)}$  и из (9) получаем:

$$\begin{aligned} C(V, V_0) &= R \left[ \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{1 - \frac{VV_0}{P_0(V_0-V)} \frac{P_0}{V_0}} \right] = R \left[ \frac{1}{\gamma-1} + \frac{V_0 - V}{V_0 - 2V} \right] = R \frac{\gamma V_0 - (\gamma+1)V}{(\gamma-1)(V_0 - 2V)} = \\ &= R \frac{\gamma - (\gamma+1)\frac{V}{V_0}}{(\gamma-1)(1 - 2\frac{V}{V_0})}. \end{aligned}$$

- В задаче 1.55: 1) *изотермический процесс* в верхней части цилиндра (над поршнем): общее давление  $P$  в обеих частях цилиндра:  $P = \frac{P_0 V_{20}}{V_2} = \frac{P_0 V_{20}}{V_{10} + V_{20} - V}$ , где  $V \equiv V_1$  — объём нижней части цилиндра (под поршнем). Отсюда  $\frac{d(\ln P)}{dV} = \frac{1}{V_{10} + V_{20} - V} = \frac{1}{V_2}$  и теплоёмкость газа в нижней части цилиндра, согласно (9) при  $\nu = 1$  и с учётом соотношения Майера  $C_P = C_V + R$  равна

$$C(V_1, V_2) = C_V + \frac{R}{1 + \frac{V_1}{V_2}} = \frac{C_P + C_V \frac{V_1}{V_2}}{1 + \frac{V_1}{V_2}} = C_V \frac{\gamma + \frac{V_1}{V_2}}{1 + \frac{V_1}{V_2}};$$

- 2) при *адиабатическом процессе* в верхней части цилиндра:  $P = P_0 V_{20}^\gamma \cdot V_2^{-\gamma} = P_0 V_{20}^\gamma \cdot (V_{10} + V_{20} - V)^{-\gamma}$ , откуда  $\frac{d(\ln P)}{dV} = \frac{\gamma}{V_{10} + V_{20} - V} = \frac{\gamma}{V_2}$  и теплоёмкость газа в нижней части цилиндра, согласно (9), равна:

$$C(V_1, V_2) = C_V + \frac{R}{1 + \gamma \frac{V_1}{V_2}} = \frac{C_P + \gamma C_V \frac{V_1}{V_2}}{1 + \gamma \frac{V_1}{V_2}} = \gamma C_V \frac{1 + \frac{V_1}{V_2}}{1 + \gamma \frac{V_1}{V_2}},$$

соответственно в задаче 1.56 (также с адиабатическим процессом), где  $V_1 = 2V_0 - V_2$ ,  $\gamma = \frac{5}{3}$  и  $C_V = \frac{3}{2}R$ , откуда  $R = \frac{2}{3}C_V$ , получаем:

$$C(V_2) = C_V + \frac{\frac{2}{3}C_V}{1 + \frac{5}{3} \frac{2V_0 - V_2}{V_2}} = C_V \left[ 1 + \frac{2}{3 + 5 \frac{2V_0 - V_2}{V_2}} \right] = C_V \left[ 1 + \frac{1}{\frac{5V_0}{V_2} - 1} \right] = \frac{C_V}{1 - \frac{V_2}{5V_0}}.$$

- В задаче 1.59:  $\ln V = -\frac{2C_V}{R} \ln T + \text{const}$ ,  $\frac{d(\ln V)}{d(\ln T)} = -\frac{2C_V}{R}$  и из выражения (5) при  $\nu = 1$  находим:

$$C = C_V + R \frac{d(\ln V)}{d(\ln T)} = C_V - 2C_V = -C_V.$$

## Список литературы

- [1] Заикин Д.А., Овчинкин В.А., Прут Э.В. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ: Учеб. пособие для вузов / В трёх частях. Ч.1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика / Под ред. В.А. Овчинкина. (3-е изд., испр. и доп.) — М.: Физматкнига, 2013.