Вывод формулы Пуазёйля методом размерностей

В.С. Булыгин

17 ноября 2013 г.

Метод размерностей позволяет найти функциональную зависимость между физическими величинами $X_0, X_1, X_2, \dots X_n$

$$X_0 \sim X_1^{a_1} X_2^{a_2} \dots X_n^{a_n} \tag{1}$$

с точностью до безразмерного множителя, являющегося или неопределённой константой, или неопределённой безразмерной функцией, аргументами которой являются безразмерные комбинации из физических величин $X_1, X_2, \dots X_n$. То, что функциональная связь в (1) является именно степенно́й, следует из требования независимости этой связи от выбора масштабов основных единиц измерения ([1, § 4], [2, § 87], [3, гл. 2.]), соображения размерности также требуют, чтобы размерность левой части выражения (1) совпадала с размерностью его правой части:

$$[X_0] = [X_1]^{a_1} [X_2]^{a_2} \dots [X_n]^{a_n} .$$

Среди (как правило, простых) задач, предлагаемых в дополнение к билету на заключительном устном госэкзамене по физике уже в течение долгого времени фигурирует такая задача:

С помощью соображений размерности получить зависимость скорости течения v вязкой жидкости на оси горизонтальной цилиндрической трубы от длины трубы l, её радиуса R, перепада давлений ΔP и вязкости жидкости η.

Так как объёмный расход жидкости

$$Q = \pi R^2 \langle v \rangle = \mathrm{const} \cdot R^2 v \,, \tag{2}$$

где $\langle v \rangle$ — средняя по сечению трубы скорость течения жидкости, то получение из соображений размерности выражения для скорости v на оси трубы позволяет одновременно получить и соответствующее выражение для Q, т. е. получить из соображений размерности формулу Пуазёйля.[1]

Разберём же, как решается задача — определить показатели степеней a, b, c, d в выражении

$$v \sim \eta^a (\Delta P)^b \, l^c R^d \tag{3}$$

с помощью метода размерностей.

Стандартная теория размерности

В обычной теории метода размерностей мы используем наши 3 основных размерных единицы измерения: длину l, $[l] \equiv L$, массу m, $[m] \equiv M$ и время t , $[t] \equiv T$. В качестве первого шага мы

[1] Закон, экспериментально установленный в 1840 г. французским врачом Жаном Луи Мари Пуазёйлем (1799–1869), был в 1839 г. выведен немецким инженером-гидростроителем Готхильфом Генрихом Людвигом Хагеном (1797–1884).

должны обнаружить все безразмерные комбинации исходных величин задачи, т. е. выяснить, когда комбинация
$$[\eta]^a\,[\Delta P]^b\,[l]^c\,[R]^d \tag{4}$$
будет безразмерной.

Размерность силы, в соответствии со 2-м законом Ньютона
$$[F]=\left[\frac{dp}{dt}\right]=\frac{[dp]}{[dt]}=\frac{[m]\,[v]}{[t]}=\frac{[m]\,[l]}{[t]^2}=LMT^{-2}\,, \tag{5}$$
размерность давления, с учётом (5),
$$[\Delta P]=\frac{[F_{\text{д}}]}{[S_\perp]}=\frac{LMT^{-2}}{L^2}=L^{-1}MT^{-2}\,, \tag{6}$$
здесь $S_\perp$ — величина перпендикулярной течению площадки, на которую действует сила давления $F_{\text{д}}$. Размерность длины трубы:
$$[l]=L \tag{7}$$
и её радиуса
$$[R]=L\,, \tag{8}$$
размерность вязкости η находится из закона Ньютона для величины силы вязкого сопротивления при течении вдоль оси x:
$$F_x=\eta\left|\frac{dv_x}{dr}\right|S_{\text{бок}}\,, \tag{9}$$
где $S_{\text{бок}}$ — величина выделенной поверхности, расположенной вдоль течения, на которой вычисляется сила вязкого трения. Из этого выражения, с учётом (5),
$$[\eta]=\frac{[F_x]}{[S_{\text{бок}}]\left[\frac{v_x}{r}\right]}=\frac{LMT^{-2}}{L^2\frac{L}{TL}}=L^{-1}MT^{-1}\,. \tag{10}$$

Таким образом, размерность выражения (4) имеет вид:
$$[\eta]^a\,[\Delta P]^b\,[l]^c\,[R]^d=\left(L^{-1}MT^{-1}\right)^a\left(L^{-1}MT^{-2}\right)^b L^cL^d=L^{-a-b+c+d}\,M^{a+b}\,T^{-a-2b}\,. \tag{11}$$
Это выражение не зависит от массы при $a+b=0$ и не зависит от времени при $a+2b=0$, что возможно только при $a=b=0$ и, следовательно, это выражение не будет зависеть также и от длины при $c=-d$. Таким образом, безразмерной комбинацией будет R/l, одна из длин поэтому исключается и искомая зависимость должна иметь вид
$$v=\eta^a(\Delta P)^b\,l^c\cdot f\left(\frac{R}{l}\right)\,, \tag{12}$$
где $f\left(\frac{R}{l}\right)$ — произвольная функция. Отсюда из уравнения размерностей
$$LT^{-1}=\left(L^{-1}MT^{-1}\right)^a\left(L^{-1}MT^{-2}\right)^b L^c=L^{-a-b+c}\,M^{a+b}\,T^{-a-2b}$$
получаем систему уравнений:
$$\begin{cases}-a-b+c=1\\ a+b=0\\ a+2b=1\end{cases}$$
откуда следует: $a=-1$, $b=1$, $c=1$. Таким образом, стандартная теория размерностей даёт:
$$v=\frac{\Delta P}{\eta}\;l\cdot f\left(\frac{R}{l}\right)\,, \tag{13}$$

т. е. теория размерностей (в стандартном варианте) предсказывает, что искомая скорость течения на оси трубы v пропорциональна разности давлений ΔP на концах трубы и обратно пропорциональна вязкости текущей жидкости η, но этот вариант теории размерностей ничего не может сказать о зависимости скорости v от линейных размеров трубы l и R. Например, глядя на выражение (13) нельзя утверждать, что скорость v пропорциональна длине трубы l, поскольку

$$l \cdot f\left(\frac{R}{l}\right) = R \cdot \frac{f\left(\frac{R}{l}\right)}{\frac{R}{l}} = R \cdot f_1\left(\frac{R}{l}\right),$$

где $f_1\left(\frac{R}{l}\right)$ — тоже произвольная функция, как и $f\left(\frac{R}{l}\right)$.

Такой, не очень конкретный физический результат обусловлен чисто математическими причинами: число физических величин ($\eta,\ \Delta P,\ l,\ R$) превышает число использованных единиц измерения ($L,\ M,\ T$) и, следовательно, число уравнений стандартной теории размерностей, равное числу единиц измерения (три) меньше числа неизвестных показателей степени физических величин (четыре), что не позволяет однозначно определить эти показатели.

В учебнике Д.В. Сивухина [2, § 97] эта трудность обходится следующим образом: автор отмечает, что в уравнения гидродинамики вязкой жидкости (уравнения Навье–Стокса) входят не сами давления, а только градиенты давления. Благодаря этому наблюдению в [2] число физических величин в задаче уменьшено с 4-х: $\eta,\ \Delta P,\ l,\ R$, до 3-х: $\eta,\ \frac{\Delta P}{l},\ R$, и выражение (3) для скорости v теперь принимает вид:

$$v \sim \eta^a \left(\frac{\Delta P}{l}\right)^b R^c \,. \tag{14}$$

Так как, с учётом (6), размерность

$$\left[\frac{\Delta P}{l}\right] = L^{-2} M T^{-2}\,,$$

то с помощью (10) и (8) получаем из (14) следующее уравнение размерностей

$$LT^{-1} = \left(L^{-1}MT^{-1}\right)^a \left(L^{-2}MT^{-2}\right)^b L^c = L^{-a-2b+c}\, M^{a+b}\, T^{-a-2b}\,,$$

откуда следует система уравнений

$$\begin{cases} -a-2b+c=1 \\ a+b=0 \\ a+2b=1 \end{cases},$$

имеющая решение: $a=-1$, $b=1$, $c=2$. Таким образом, из (14) получаем ответ:

$$v = C_0 \cdot \frac{\Delta P}{\eta l}\, R^2\,, \tag{15}$$

где C_0 — неопределённая константа, численное значение которой *не может* быть определено с помощью метода размерностей; прямой расчёт [2, § 97, формула (97.3)] даёт

$$C_0 = \frac{1}{4}\,.$$

Теперь с помощью (2) можно получить формулу Пуазёйля для объёма вязкой жидкости, протекающего через трубу за единицу времени (объёмного расхода жидкости):

$$Q = C \cdot \frac{\Delta P}{\eta l}\, R^4\,, \tag{16}$$

где, согласно прямому расчёту [2, § 97, формула (97.4)],

$$C = \frac{\pi}{8}\,.$$

Попутно заметим, что с помощью точных выражений для объёмного расхода и скорости жидкости на оси трубы можно получить выражение для средней по сечению трубы скорости $\langle v\rangle$. Из (2) находим:

$$\langle v\rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta P}{8\eta l}\,R^2 = \frac{1}{2}\,v\,. \tag{17}$$

Расширенная (обобщённая) теория размерности

В расширенной теории метода размерностей (см. [4, гл. 6]), учитывая физические особенности задачи, стараются увеличить число основных единиц измерения и сделать, по возможности, количество единиц измерения равным количеству заданных физических параметров — в этом случае удаётся однозначно определить все показатели степеней в выражении (1).

Простейший анализ физики процесса течения по трубе показывает, что в нашей задаче продольные и поперечные размеры трубы играют разную роль: всё движение происходит в направлении оси трубы, а давление дополнительно определяется и поперечными к оси размерами трубы. Поэтому в нашей задаче физически оправдано вместе с единицами массы M и времени T ввести *две единицы длины*: продольную (вдоль оси трубы) $L_\parallel$ и поперечную $L_\perp$,[2] что делает равным количество основных единиц измерения и число заданных физических параметров.

Искомая осевая скорость v будет иметь теперь размерность

$$[v] = \left[\frac{dx}{dt}\right] = L_\parallel T^{-1} \tag{18}$$

Так как и сила давления, и сила вязкого трения направлены вдоль оси трубы, то сила (5) имеет теперь размерность

$$[F] = \frac{[m]\,[v]}{[t]} = L_\parallel M T^{-2}\,. \tag{19}$$

Размерность поперечной площадки $[S_\perp] = L_\perp^2$, поэтому размерность давления, с учётом (19),

$$[\Delta P] = \frac{[F]}{[S_\perp]} = \frac{L_\parallel M T^{-2}}{L_\perp^2} = L_\parallel L_\perp^{-2} M T^{-2}\,, \tag{20}$$

размерность длины трубы:

$$[l] = L_\parallel \tag{21}$$

и размерность её радиуса

$$[R] = L_\perp\,. \tag{22}$$

Размерность поперечного градиента скорости

$$\left[\frac{dv}{dr}\right] = \frac{[v]}{L_\perp} = L_\parallel L_\perp^{-1} T^{-1}\,,$$

размерность площади боковой поверхности, на которой развивается вязкое трение $[S_{\text{бок}}] = L_\parallel L_\perp$, поэтому размерность вязкости (10) теперь будет

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S_{\text{бок}}]\left[\frac{dv}{dr}\right]} = \frac{L_\parallel M T^{-2}}{L_\parallel L_\perp \cdot L_\parallel L_\perp^{-1} T^{-1}} = L_\parallel^{-1} M T^{-1}\,. \tag{23}$$

[2] Заметим, что введение продольной и поперечной длин, в частности, делает различными размерность работы или энергии $L_\parallel^2 M T^{-2}$ (сила на продольное расстояние) и размерность момента силы $L_\parallel L_\perp M T^{-2}$ (сила на плечо — поперечное расстояние).

Из уравнения размерностей, получаемого из (3),

$$[v] = [\eta]^a \, [\Delta P]^b \, [l]^c \, [R]^d \tag{24}$$

и с учётом выражений (18), (23), (20), (21) и (22) принимающего вид

$$L_\parallel T^{-1} = \left(L_\parallel^{-1} M T^{-1}\right)^a \left(L_\parallel L_\perp^{-2} M T^{-2}\right)^b L_\parallel^c \, L_\perp^d = L_\parallel^{-a+b+c} \, L_\perp^{-2b+d} \, M^{a+b} \, T^{-a-2b}$$

следует система уравнений

$$\begin{cases} -a+b+c=1 \\ -2b+d=0 \\ a+b=0 \\ a+2b=1 \end{cases},$$

имеющая решение: $a=-1$, $b=1$, $c=-1$, $d=2$. Таким образом, расширенная теория размерностей из выражения (3) (или (24)) позволяет получить из 4-х физических параметров η, ΔP, l, R правильный ответ для скорости жидкости v на оси трубы:

$$v = C_0 \cdot \frac{\Delta P}{\eta l} \, R^2 \,, \tag{25}$$

совпадающий с (15). Следовательно, таким же будет и выражение для объёмного расхода жидкости (формула Пуазёйля (16)):

$$Q = C \cdot \frac{\Delta P}{\eta l} \, R^4 \,.$$

Число Рейнольдса для течения в трубе

Формула Пуазёйля, как и формула для скорости течения на оси трубы, справедлива при ламинарном течении жидкости в трубе, когда выполняется ньютоновский закон вязкого трения (9). Английский физик Осборн Рейнольдс (1842–1912) в 1876–1883 годах опытным путём установил *закон подобия*, согласно которому переход от ламинарного течения к турбулентному в каждом классе течений происходит при приблизительно одинаковых значениях параметра, названного впоследствии *числом Рейнольдса*. Число Рейнольдса **Re** является безразмерным и определяется выражением:

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho v}{\eta} \, l_{\text{хар}} \,, \tag{26}$$

где ρ и η — плотность и вязкость жидкости, v и $l_{\text{хар}}$ — характерная скорость и характерный линейный размер течения.

Расширенная теория размерностей позволяет выяснить, что является характерным линейным размером $l_{\text{хар}}$ для течения жидкости по трубе длиной l и радиусом R. Так как, с учётом (21) и (22), размерность плотности равна

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = [m] \cdot \left[\pi R^2 l\right]^{-1} = L_\parallel^{-1} L_\perp^{-2} M \,,$$

то с помощью (23) и (18) из (26) находим для размерности характерного линейного размера:

$$[l_{\text{хар}}] = \frac{[\eta]}{[\rho]\,[v]} = \frac{L_\parallel^{-1} M T^{-1}}{L_\parallel^{-1} L_\perp^{-2} M \cdot L_\parallel T^{-1}} = \frac{L_\perp^2}{L_\parallel} \,,$$

и, таким образом, расширенная теория размерностей указывает, что в качестве характерного линейного размера в выражении для числа Рейнольдса (26) в случае течения по трубе следует брать следующую комбинацию из радиуса трубы R и её длины l:

$$l_{\text{хар}} = \frac{R^2}{l} \,,$$

этот результат другим путём получен в [2, § 98.2]. Выбирая в качестве характерной скорости скорость течения на оси трубы (см. (25)) получаем из (26):

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho v R^2}{\eta l} = \frac{\rho \cdot \Delta P}{\eta^2} \frac{R^4}{l^2}$$

— выражение для числа Рейнольдса, которое следует использовать когда R и l сравнимы по величине. При большой длине трубы ($l \gg R$) параметры течения уже не будут зависеть от длины трубы (при $\frac{\Delta P}{l} = \mathrm{const}$), длина l исчезает из параметров задачи, радиус трубы R остаётся единственной величиной с размерностью длины и число Рейнольдса для такого течения, согласно (26), принимает вид:

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\eta} \,,$$

где $D = 2R$ — диаметр трубы и $\langle v \rangle = Q/S_\perp = Q/(\pi R^2) = \frac{1}{2} v$ — среднее значение скорости течения по трубе (17). В опытах с длинными трубами О. Рейнольдсом было установлено, что критическое значение $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$ такого числа Рейнольдса составляет 2300 (при $\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{\text{кр}}$ ламинарное течение переходит в турбулентное). В последующих экспериментах других исследователей, при тщательном уменьшении возмущений тока жидкости при входе в трубу, значение $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$ было сначала увеличено до $2{\cdot}10^4$, а потом и до $4{\cdot}10^4$. При $\mathbf{Re} \lesssim 2000$ любые возмущения течения на входе трубы со временем затухают и в достаточно длинной трубе всегда устанавливается ламинарное течение [5].

Заключительные замечания

Методы теории размерностей позволяют — в лучшем случае — установить искомую функциональную зависимость с точностью до неопределённого числового множителя. Приятным сюрпризом в применении методов теории размерностей является то, что этот числовой множитель нередко оказывается не слишком отличающемся от единицы, т. е. теория размерностей в этом случае не только устанавливает функциональную зависимость от параметров задачи, но и позволяет производить количественные оценки.

Наиболее впечатляющим примером такого рода в моей научной работе был следующий случай ([6]): из решения уравнения Шрёдингера (основного уравнения нерелятивистской квантовой механики) было получено выражение для нижнего предела длительности электронного пакета, прошедшего ускоряющий промежуток с напряжённостью электрического поля E, которое имеет следующий вид:

$$\tau_{\inf} = \frac{4\pi}{6^{1/6} \cdot \Gamma^2(1/3)} \left(\frac{m\hbar}{e^2 E^2} \right)^{1/3} \simeq 1{,}30 \left(\frac{m\hbar}{e^2 E^2} \right)^{1/3} \,, \qquad (27)$$

здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, e и m — заряд и масса электрона. Выражение (27) с точностью до множителя 1,30 (а в статье [6] в результате моей арифметической ошибки было написано 1,03) равняется функциональному выражению в круглых скобках, которое может быть получено из соображений размерности: задача квантовая — должна участвовать постоянная Планка $\hbar$, задача динамическая — участвуют m — масса электрона и eE — сила, действующая на электрон, и, следовательно, требуется найти показатели степени в уравнении размерностей

$$[\tau_{\inf}] = [\hbar]^a \, [m]^b \, [eE]^c$$

или

$$T = \left(L^2 M T^{-1} \right)^a (M)^b \left(L M T^{-2} \right)^c = L^{2a+c} \, M^{a+b+c} \, T^{-a-2c} \,,$$

откуда следует система уравнений

$$\begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + 2c = -1 \end{cases}$$

имеющая решение: $a = b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{2}{3}$.

Указание на малость отличия числового множителя в (27) от единицы позволило мне в статье [6] уверенно воспользоваться методом размерностей для нахождения релятивистского ограничения области применимости нерелятивистского выражения (27), обойдя тем самым строгий анализ решений математически значительно более сложного уравнения Дирака (уравнения для релятивистского электрона, описываемого уже не простой однокомпонентной, а четырёхкомпонентной волновой функцией), решения которого весьма громоздки.

Список литературы

[1] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. — М.: Наука, 1967.

[2] *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 1, Механика. — М.: Наука, 1974.

[3] *Бриджмен П.* Анализ размерностей (под ред. акад. С.И. Вавилова). — М.-Л.: ГТТИ, 1934. (Переиздание — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.)

[4] *Хантли Г.* Анализ размерностей. — М.: Мир, 1970.

[5] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969. С. 426–427.

[6] *Булыгин В.С.* О квантовом ограничении электронно-оптического метода исследования быстропротекающих процессов// ЖТФ, **54** (1984), вып. 1. С. 51–55.