Введение

1. Измерения и обработка результатов измерений

Измерение физических величин и получение их числовых значений являются непосредственной задачей большинства физических экспериментов. Однако результаты всех измерений, как бы тщательно они не выполнялись, всегда получаются с некоторыми погрешностями. Кроме того, результаты эксперимента или наблюдения зачастую представляют собой набор статистических данных, которые необходимо уметь правильно обрабатывать и интерпретировать. Это касается, безусловно, не только физического эксперимента, но и любой науки, оперирующей какими-либо экспериментальными или наблюдательными данными, в частности, таких областей, как медицина, экономика, социология и т. д.

Анализ и оценка погрешностей составляют предмет отдельной науки — теории ошибок, а теорией обработки статистических данных занимается тесно связанная с ней дисциплина — математическая статистика.

Умение работать с погрешностями, или «ошибками», является важной частью любого научного эксперимента на всех его этапах. Так, при подготовке и проведении эксперимента необходимо знать точность используемых приборов, уметь находить пути возможного уменьшения ошибок, разумно организовать сами измерения и правильно оценивать точность полученных значений. На этапе обработки возникает необходимость пересчитывать возможную ошибку в конечных результатах по известным оценкам погрешностей в исходных данных. А на самом важном этапе — интерпретации результатов эксперимента или наблюдения — без знания точности проведённых измерений и без корректной статистической обработки невозможно делать обоснованные выводы в пользу той или иной физической модели, той или иной гипотезы.

Здесь мы приводим лишь краткую выдержку самых базовых понятий теории ошибок и обработки экспериментальных данных, необходимых для работы в учебной физической лаборатории. Для более глубокого изучения данного предмета и разъяснения непонятных моментов рекомендуем обращаться к специальным руководствам, например, к прекрасной книге Дж. Тейлора [2], снабжённой множеством практических примеров и пояснений.

1.1. Измерения и их погрешности

Измерения делятся на прямые и косвенные.

Прямые измерения производятся с помощью приборов, которые измеряют непосредственно саму исследуемую величину. Так, массу тела можно найти с помощью весов, длину измерить линейкой, а время — секундомером.

К *косвенным* относятся измерения таких физических величин, для нахождения которых необходимо использовать теоретическую связь с другими, полученными в прямых измерениях, величинами, например, нахождение объёма тела по его линейным размерам, нахождение плотности тела по измеренным массе и объёму, расчёт сопротивления проводника по показаниям вольтметра и амперметра.

Качество измерений определяется их точностью. При прямых измерениях точность опытов устанавливается из анализа точности метода и прибора, а также из повторяемости результатов измерений. Точность косвенных измерений определяется погрешностью исходных прямых измерений и структурой соответствующей расчётной формулы.

Точность измерений характеризуется их погрешностями. *Абсолютной погрешностью измерений* называют разность между найденным на опыте $x_{\text{изм}}$ и истинным $x_{\text{ист}}$ значением физической величины. Обозначая абсолютную погрешность измерения величины x символом Δx, получим

$$\Delta x = x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}. \tag{1}$$

Заметим, что по данной формуле значение погрешности вычислить невозможно, поскольку истинное значение физической величины $x_{\text{ист}}$ неизвестно. Напротив, погрешность Δx должна *оцениваться* из точности приборов, разброса экспериментальных данных, методики измерения и т. д. И именно на основании этой оценки мы можем делать вывод о значении $x_{\text{ист}}$ по измеренному $x_{\text{изм}}$. Если $\Delta x_{\text{оц}}$ — оценка погрешности измерения ($\Delta x_{\text{оц}} > 0$), то результат измерения можно представить в виде

$$x_{\text{ист}} = x_{\text{изм}} \pm \Delta x_{\text{оц}}, \tag{2}$$

что означает, что $x_{\text{ист}}$ лежит в интервале $x_{\text{изм}} - \Delta x_{\text{оц}} < x_{\text{ист}} < x_{\text{изм}} + \Delta x_{\text{оц}}$ с некоторой достаточно высокой вероятностью (см. подробнее раздел 1.4).

Кроме абсолютной погрешности Δx часто бывает важно знать относительную погрешность ε_x измерений, которая равна отношению абсолютной погрешности к значению измеряемой величины:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}} = \frac{x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}}{x_{\text{ист}}} \approx \frac{\Delta x_{\text{оц}}}{x_{\text{изм}}}. \tag{3}$$

Качество измерений часто определяется именно относительной, а не абсолютной погрешностью. Например, одна и та же погрешность в 1 мм при измерении длины комнаты (для бытовых целей) не играет роли, при измерении ширины стола может быть существенна, а при определении диаметра болта совершенно недопустима. Это происходит потому, что относительная погрешность измерений в первом случае составляет $\sim 2 \cdot 10^{-4}$, во втором $\sim 10^{-3}$, а в третьем может составлять 0,1 и более.

Отметим, что вместо того чтобы говорить об абсолютной и относительной *погрешности* измерений, часто говорят об абсолютной и относительной *ошибке*. Между терминами «погрешность» и «ошибка» нет никакого различия, и мы будем пользоваться ими обоими.

Без указания оценки погрешности результат измерения имеет малую ценность. Существенное занижение или завышение этой оценки относительно реальной точности проведённых измерений недопустимо, поскольку ведёт к неправильным выводам.

1.2. Классификация погрешностей

Говоря о погрешностях измерений, необходимо прежде всего упомянуть о *грубых погрешностях* (промахах), возникших вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры. Грубых ошибок следует избегать. Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения нужно отбросить.

Не связанные с грубыми ошибками погрешности опыта делятся на систематические и случайные.

Систематические погрешности сохраняют свою величину и знак или закономерно изменяются во время эксперимента. Они могут быть связаны с ошибками приборов (неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта, неравные плечи весов) и с неправильной физической моделью, используемой при интерпретации опыта, например, при взвешивании тела малой плотности без учёта выталкивающей архимедовой силы воздуха, которая систематически занижает вес тела.

Случайные погрешности меняют величину и знак от опыта к опыту. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто их результаты не в точности равны друг другу, а «пляшут» вокруг некоторого среднего значения.

Случайные погрешности эксперимента исследуются путём сравнения результатов, полученных при нескольких измерениях, проведённых в одинаковых условиях. Если при двух-трёх измерениях результаты совпали, то на этом следует остановиться. Если они расходятся, нужно попытаться понять причину расхождения и устранить её. Если устранить причину не удаётся, следует произвести 10–12 измерений и, записав все результаты, обработать их в соответствии с полученной закономерностью разброса величин.

Заметим, что различие между систематическими и случайными погрешностями является условным и связано с постановкой опыта. Например, производя измерение тока не одним, а несколькими одинаковыми амперметрами, мы превращаем систематическую ошибку, связанную с неточностью шкалы, в случайную ошибку, величина и знак которой зависят от того, какой поставлен амперметр в данном опыте.

Кроме того, можно разделить погрешности по происхождению на естественные (связанные со случайным характером изучаемого процесса), методические (связанные с несовершенством метода измерения или теоретической модели явления) и *инструментальные* (или приборные). Такое разделение также весьма условно, ибо, к примеру, любой прибор подвержен случайным факторам, а в основе его работы всегда лежит некий естественный процесс, который описывается некоторой, возможно несовершенной, теорией.

1.3. Систематические погрешности

К систематическим погрешностям относятся, как уже отмечалось, такие, которые обязаны своим происхождением действию неизменных по своей величине и направлению факторов. Эти погрешности невозможно обнаружить (а также исключить или уменьшить) просто путём многократного повторения опыта. Их условно можно разделить на несколько групп:

- Погрешности, природа которых известна и которые могут быть достаточно точно определены. Такие погрешности могут быть изучены и учтены путём прямого внесения поправок в расчётные формулы или в результаты измерений.

  Например, при измерении напряжения или тока в цепи бывает необходимо учитывать неидеальность приборов (т. е. наличие малого, но не нулевого сопротивления у амперметра, или большого, но не бесконечного сопротивления у вольтметра).

- Погрешности известного происхождения, но неизвестной величины. Например, возможный сдвиг нуля шкалы некоторого прибора или отставание измеренной температуры тела от истинной при быстром нагревании тела. От такой погрешности можно избавиться, модифицируя методику измерения.

- Погрешности, о существовании которых мы не подозреваем, но которые могут существенно искажать результаты измерений. Такие погрешности самые опасные — они могут возникать в сложных измерениях и малоизученных областях исследования. Исключить их можно только независимой многократной проверкой измерений разными методами и в разных условиях.

Если систематическая погрешность опыта слишком велика, то обычно оказывается проще использовать новые, более точные приборы, чем исследовать погрешность старых.

Оценку систематических погрешностей экспериментатор проводит, анализируя особенности методики, паспортную точность прибора и проводя контрольные опыты.

В учебном практикуме учёт систематических ошибок ограничивается, как правило, лишь случаем инструментальных погрешностей (см. раздел 1.7).

1.4. Случайные погрешности

Случайные погрешности могут быть обнаружены при простом многократном повторении опыта. При определённых условиях статистические методы обработки данных могут помочь уменьшить результирующую ошибку. Случайные погрешности бывают связаны, например,

- с особенностями используемых приборов: с сухим трением (из-за которого стрелка прибора вместо того, чтобы останавливаться в правильном положении, «застревает» вблизи него), с люфтом в механических приспособлениях, с тряской, которую в городских условиях трудно исключить и т. д.

- с особенностью или несовершенством процесса измерения: например, при считывании экспериментатором показаний прибора, если стрелка находится в промежуточном положении между делениями, или при измерении времени секундомером, когда ошибка возникает ввиду конечного времени реакции человека;

- с несовершенством объекта измерений: например, при измерении диаметра проволоки, которая из-за случайных причин, возникающих при изготовлении, имеет не вполне круглое сечение;

- со случайным характером самой измеряемой величины: например, число космических частиц, регистрируемых счётчиком за 1 минуту, есть случайная величина. Повторяя измерения, найдём, что в разных опытах получаются разные числа, хотя и не слишком отличающиеся друг от друга, колеблющиеся около некоторого среднего значения.

Остановимся несколько подробнее на двух последних случаях. Они отличаются тем, что разброс данных в них порождён внешними по отношению к используемым приборам причинам, т. е. по причинам, которые можно назвать «естественными». При этом если погрешности приборов малы и значения физических величин могут быть измерены достаточно точно, то «ошибка», или «погрешность», возникает лишь при замене истинных значений (имеющих естественный разброс) на некоторое среднее и характеризует не столько точность измерения, сколько сам исследуемый процесс. Однако *с математической точки зрения естественные и приборные погрешности неразличимы* — глядя на одни только экспериментальные данные невозможно выяснить, что именно явилось причиной их отклонения от среднего. Для исследования природных случайных процессов необходимо отдельно исследовать и оценить имеющиеся инструментальные погрешности и убедиться, что они достаточно малы.

Случайные величины, к которым относятся случайные погрешности, изучаются в теории вероятностей и в математической статистике. Мы опишем — с пояснениями, но без доказательств — основные свойства и правила обращения с такими величинами в том объёме, который необходим для обработки результатов измерений, полученных в лаборатории.

Предположим, что мы проделали n измерений какой-либо величины x в условиях, когда промахи и систематические ошибки устранены и можно рассматривать только случайные ошибки. В результате этих измерений мы получим ряд значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Важнейшими характеристиками полученного набора величин является их среднее значение (*среднее арифметическое*):

$$\boxed{x_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}} \tag{4}$$

и мера их разброса относительно среднего, в качестве которого берётся так называемое *среднеквадратичное отклонение*:

$$\boxed{\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{\text{ср}})^2}.} \tag{5}$$

Здесь индекс «отд» означает, что это погрешность отдельного измерения (ср. с разделом 1.5).

Если отклонения исследуемой величины происходят в положительную и отрицательную сторону с примерно равной вероятностью, то естественно предположить, что при суммировании в (4) они будут взаимно уничтожаться. В строгой форме это предположение доказывается в теории вероятностей: при некоторых достаточно общих предположениях об изучаемой случайной величине справедлив так называемый *закон больших чисел*, утверждающий, что при больших значениях n (т. е. $n \to \infty$) сумма (4) стремится к некоторому значению x_0[1]:

$$\lim_{n\to\infty} x_{\text{ср}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_0,$$

которое можно назвать «истинным» средним для данной случайной величины (в математике его называют *математическим ожиданием*). На практике обычно можно сделать лишь небольшое количество измерений, поэтому если разброс данных не слишком велик, т.е. ($\sigma_{\text{отд}} \ll x_{\text{ср}}$), то измеренное $x_{\text{ср}}$ можно отождествить с x_0:

$$x_0 \approx x_{\text{ср}},$$

и при этом сделать вывод о том, что результат каждого отдельного измерения будет лежать с некоторой вероятностью P в интервале $(x_{\text{ср}} - \sigma_{\text{отд}},\, x_{\text{ср}} + \sigma_{\text{отд}})$. Перейдём к теоретическому расчёт этой вероятности.

Распределение Гаусса. Чтобы оценить достоверность полученных результатов, необходимо обратиться к теоретическому рассмотрению случайных погрешностей отдельных измерений. Одним из центральных результатов теории вероятностей является так называемая *центральная предельная теорема*, которая утверждает, что сумма достаточно большого количества независимых (или слабо зависимых) случайных величин, каждая из которых вносит достаточно малый вклад в общую сумму, подчиняется так называемому *нормальному распределению* (или распределению Гаусса).[2] А именно, вероятность того, что значение неко-

[1] Строго говоря, «истинное» среднеквадратичное отклонение также должно определяться как предел, к которому стремится выражение (5) при больших n:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2}.$$

[2] Стоит отметить, что нормальный закон распределения имеет огромную степень универсальности, поскольку справедлив не зависимо от того, как распределены со-

торой случайной величины окажется в интервале $(x,x+dx)$, равна:

$$\boxed{dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx,} \tag{6}$$

где x_0 и σ — параметры нормального распределения: x_0 соответствует среднему и наиболее вероятному значению x, а σ — среднеквадратичному отклонению. Величину σ^2 принято называть *дисперсией* распределения. Функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

в физике обычно называют *функцией распределения*, а в математике — *плотностью вероятности* распределения Гаусса. В общем случае смысл её таков: если необходимо найти вероятность, с которой случайная величина лежит в интервале (a,b), необходимо взять интеграл от соответствующей функции распределения f по x:

$$P(a < x < b) = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Графики закона нормального распределения с различными значениями σ изображены на рис. 1. Распределение представляет из себя «колокол», положение вершины которого соответствует среднему и наиболее вероятному значению x_0, а ширина которого по порядку величины равна σ. При удалении x от центра, значение функции Гаусса очень быстро убывает, так что вероятность встретить достаточно большие отклонения от среднего крайне мала.

Точки $|x - x_0| = \sigma$ есть точки перегиба кривой Гаусса. Параметр σ есть мера рассеяния случайных погрешностей $\Delta x = |x - x_0|$. Если результаты измерений x группируются вблизи наивероятнейшего значения x_0 и значения случайных погрешностей δ в основном малы, то мала и величина σ (график 1, $\sigma = \sigma_1$). Наоборот, если случайные погрешности δ имеют большие значения и сильно рассеяны, то кривая становится более размытой (график 2, $\sigma = \sigma_2$) и $\sigma_2 > \sigma_1$. Величина σ количественно отражает разброс значений измеряемой величины.

Обратимся теперь к расчёту упомянутой выше вероятности P для

ставляющие общую сумму случайные величины (главное, чтобы существовали конечные среднее и дисперсия). Однако не стоит его переоценивать: многие случайные явления не подчиняются распределению Гаусса — в качестве яркого примера можно привести распределение Парето, часто встречающееся в экономике и социологии, описывающее, в частности, распределение людей по богатству, и следующее из этого распределения известное правило «80/20» которое в шутливой форме можно сформулировать как «20% людей выпивают 80% пива».

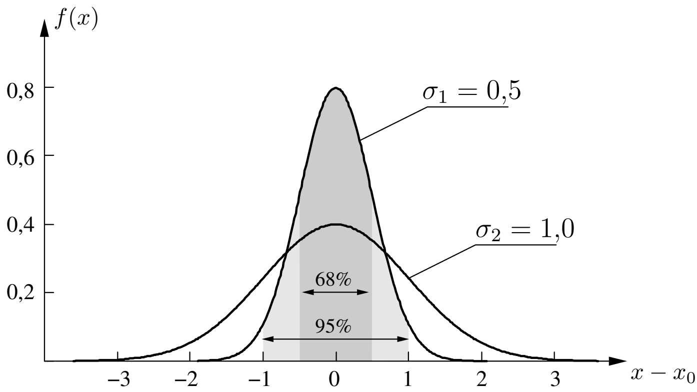

Рис. 1. Нормальное распределение

формулы (2). Значение интеграла[3]

$$\int\limits_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} f(x)\,dx,$$

равное отношению площади под кривой Гаусса, ограниченной значениями $\Delta x = \pm\sigma$ (на рис. 1 эта площадь заштрихована для $\sigma_1 = 0{,}5$), ко всей площади под кривой для любого σ, составляет 0,68, и запись

$$x = x_0 \pm \sigma \tag{7}$$

говорит о том, что любое проведённое измерение x с вероятностью $P = 0{,}68$ (68%) лежит в этом интервале.

Вероятность попадания любого проведённого измерения в промежуток $x = x_0 \pm 2\sigma$ составляет 0,95, а для $x = x_0 \pm 3\sigma$ вероятность равна 0,997.

Распределение Гаусса применимо в ситуациях, когда результирующая величина является суммой множества случайных и независимых факторов. Такая ситуация очень часто имеет место в научных экспериментах и наблюдениях, поэтому не случайно, что именно распределение Гаусса выбрано для определения вероятности отклонения при *стандартной записи результата* (2) — при этом в физике обычно под записью $\pm\Delta x$ имеется в виду одно стандартное отклонение и вероятность $P = 68\%$, а в технических измерениях, как правило, принимается, что $\pm\Delta x = \pm 2\sigma$ и соответственно $P = 95\%$.

[3] Этот интеграл не берётся в элементарных функциях и рассчитывается численно.

Поправки при малом числе измерений. Если n — невелико (на практике, $n < 10$), то вычисленное по небольшому набору данных среднее $x_{\text{ср}}$ может заметно отличаться от искомого x_0, и поскольку в формулу для погрешности (5) мы подставляем именно $x_{\text{ср}}$, а не x_0 (которое нам не известно), то (5) даёт довольно грубую (заниженную) оценку $\sigma_{\text{отд}}$ (так, при $n = 1$ получаем $\sigma = 0$). Согласно математической статистике рекомендуется использовать следующую формулу (так называемая «несмещённая оценка» параметра σ):

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{\text{ср}})^2}. \tag{8}$$

Здесь $\sigma_{\text{отд}}$ — среднеквадратичная погрешность отдельного измерения или стандартная погрешность (стандартное отклонение), полученная путём измерений. Достоверность вычислений $\sigma_{\text{отд}}$ увеличивается с увеличением числа измерений n.

1.5. Погрешность среднего арифметического результата измерения

Практически нас больше интересует не точность каждого из измерений, а то, насколько измеренное нами среднее арифметическое $x_{\text{ср}}$ (вычисленное по формуле (4)) отличается от «истинного» среднего x_0.

Представим, что мы провели m серий по n измерений, и для каждой j-й серии, $j = 1\,..\,m$, нашли своё $x_{\text{ср},j}$. Эти значения колеблются случайным образом около некоторого значения x_0 и их среднеквадратичное отклонение от этого значения определяется по формуле

$$\sigma_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{\text{ср},j} - x_0\right)^2} \text{ при } m \to \infty.$$

Несложно доказать (см. раздел 1.8), что если измеряемая величина имеет распределение Гаусса, то средняя квадратичная погрешность результата $\sigma_{\text{ср}}$ связана со средней квадратичной погрешностью отдельного измерения $\sigma_{\text{отд}}$ следующим образом:

$$\boxed{\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}}.} \tag{9}$$

Исходя из этого, на практике можно по одной проведённой серии из n измерений сделать вывод, что среднеквадратичная ошибка измеренного среднего равна

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{n}} \approx \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{\text{ср}})^2}, \tag{10}$$

и результат многократного измерения величины x может быть представлен в виде

$$x = x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}. \tag{11}$$

Эта запись утверждает, что наивероятнейшее значение измеряемой величины x с вероятностью 0,68 (68%) лежит в интервале $x_{\text{ср}} \pm \sigma_{\text{ср}}$.

Погрешность $\sigma_{\text{ср}}$ обычно называют стандартной *погрешностью опыта*, а её квадрат — дисперсией.

Если исходить из гипотезы о нормальности распределения, то погрешность результата измерений только в 5% случаях превосходит $2\sigma_{\text{ср}}$ и почти всегда оказывается меньше $3\sigma_{\text{ср}}$.

Следует иметь в виду, что при $n \sim 10$ измерение $\sigma_{\text{ср}}$ определяется с точностью до 20–30%. Поэтому расчёт погрешностей следует выполнять с точностью до двух знаков, не более.

1.6. О квадратичном сложении погрешностей

В теории вероятностей доказывается следующая теорема (см. [2], с. 132). Пусть имеются две *независимые* случайные величины x и y, каждая из которых подчиняется нормальному закону распределения со средними x_0 и y_0 и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2. Тогда случайная величина $z = x + y$ также *подчиняется нормальному закону* со средним $z_0 = x_0 + y_0$ и дисперсией

$$\boxed{\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.} \tag{12}$$

Заметим, что формула (12) имеет место и для суммы произвольных (имеющих конечную дисперсию, не обязательно нормально распределённых) *независимых* случайных x и y.

В самом деле: пусть Δx и Δy — отклонения x и y от среднего. Тогда в силу независимости $\langle \Delta x \cdot \Delta y \rangle = \langle \Delta x \rangle \cdot \langle \Delta y \rangle = 0$, а значит:

$$\sigma_z^2 = \left\langle (\Delta x + \Delta y)^2 \right\rangle = \left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle + \left\langle (\Delta y)^2 \right\rangle + \langle 2\Delta x \Delta y \rangle = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Кроме того, исходя из (12) несложно доказать формулу (9). Обозначая $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и учитывая, что $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \ldots = \sigma_x$ (так как измеряется одна и та же физическая величина), получаем согласно данной теореме (в предположении, что измерения произведены независимо друг от друга), что

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \sigma_{x_n}^2} = \sqrt{n}\,\sigma_x.$$

откуда, поскольку $x_{\text{ср}} = s/n$, заключаем, что

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

1.7. Инструментальные погрешности

Погрешности измерительных приборов могут иметь как систематическую, так и случайную составляющую. Можно говорить о некоторой единой оценке погрешности прибора $\sigma_{\text{инстр}}$, которая учитывает обе составляющие.

Рассмотрим в качестве простейшего примера измерение длины линейкой. Один из источников погрешности — это необходимость выбора некоторого значения (интерполяции) между метками шкалы, и эта погрешность, называемая *погрешностью отсчёта* по шкале, очевидно, случайна (мы можем с равной вероятностью как переоценить, так и недооценить результат). С другой стороны, имеется вероятность того, что линейка дефектна (растянута или сжата, неточно нанесены штрихи), что, возможно, будет приводить к систематической погрешности.

В качестве другого типичного примера рассмотрим измерение напряжения вольтметром. Во-первых, погрешность $\sigma_{\text{приб}}$ прибора определяется производителем и указывается в паспорте или при маркировке (см. ниже), она представляет из себя оценку максимальной систематической ошибки при измерениях. Во-вторых, неизбежно существует погрешность отсчёта $\sigma_{\text{отсч}}$, которая для стрелочных приборов может быть оценена как половина цены деления, а для электронных — как величина, соответствующая последнему разряду на циферблате. Обычно, хотя и не всегда, производитель старается согласовывать погрешность отсчёта по шкале и погрешность прибора. И, наконец, при снятии показаний стрелка прибора или цифры на циферблате могут колебаться относительно некоторого значения. Это может быть связано, как уже говорилось, и с разного рода шумами внутри прибора, и с колебаниями измеряемой величины. Если мы записываем некоторое среднее значение колеблющегося напряжения, то разброс показаний прибора должен быть учтён в виде оценки случайной погрешности $\sigma_{\text{случ}}$. Как следует из предыдущего раздела, чтобы получить результирующую погрешность измерения, необходимо сложить отдельные составляющие среднеквадратичным образом: $\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{приб}} + \sigma^2_{\text{отсч}} + \sigma^2_{\text{случ}}}$.

Погрешности стрелочных электроизмерительных приборов (амперметров, вольтметров, потенциометров и т. п.) определяются их классом точности, который выражает абсолютную погрешность прибора в процентах от максимального значения включённой шкалы. Пусть на шкале вольтметра с диапазоном показаний от 0 до 10 В в кружке стоит цифра 1. Эта цифра показывает, что класс точности вольтметра 1 и предел его допустимой погрешности равен 1% от максимального значения включённой шкалы, т. е. равен ±0,1 В. Кроме того, надо иметь в виду, что наносить деления на шкале принято с таким интервалом, чтобы величина абсолютной погрешности прибора не превышала половины цены деления шкалы.

Класс точности стрелочных электроизмерительных приборов (как и полцены деления шкалы) определяет максимальную (предельную) абсолютную погрешность, величина которой не меняется вдоль всей шкалы. Относительная же погрешность при этом резко меняется, поэтому приборы обеспечивают лучшую точность при отклонении стрелки почти на всю шкалу. Отсюда следует рекомендация: *выбирать прибор (или шкалу многошкального прибора) так, чтобы стрелка прибора при измерениях находилась во второй половине шкалы.*

В последнее время широко используются цифровые универсальные приборы, в том числе и электроизмерительные, отличающиеся высокой точностью и многоцелевым назначением. В отличие от стрелочных приборов систематические погрешности цифровых электроизмерительных приборов оцениваются по формулам, приводимым в инструкциях по эксплуатации. Так, например, значение относительной погрешности в процентах универсального цифрового вольтметра В7-34, работающего на включённом пределе 1 В, оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = \left[0{,}015 + 0{,}002\left(\frac{U_{kx}}{U_x} - 1\right)\right] \cdot \left[1 + 0{,}1 \cdot |t - 20|\right],$$

где U_{kx} [В] — значение предела измерения (максимальное измеряемое напряжение), U_x [В] — значение измеряемой величины, t [°C] — температура.

Несколько слов о точности линеек. Металлические линейки относительно точны: миллиметровые деления наносятся с погрешностью не более $\pm 0{,}05$ мм, а сантиметровые не более чем с точностью 0,1 мм, так что считывание результата измерения можно проводить с помощью лупы, снабжённой дополнительной шкалой. Деревянными или пластмассовыми линейками лучше не пользоваться: их погрешности неизвестны и могут оказаться неожиданно большими. Исправный микрометр обеспечивает точность 0,01 мм, а погрешность измерения штангенциркулем определяется точностью, с которой может быть сделан отсчёт, т. е. точностью нониуса. У штангенциркулей цена делений нониуса составляет обычно 0,1 или 0,05 мм.

1.8. Сложение инструментальной и случайной погрешностей

Погрешность приборов зачастую имеет в своей основе систематическую составляющую. Однако мы обычно имеем дело только с оценкой погрешности и не знаем ни её знак, ни её величину. Можно говорить о вероятности нахождения измеренной величины x в некотором интервале $x \pm \sigma_{\text{инстр}}$. Поэтому при сложении с другими погрешностями опыта инструментальная погрешность учитывается наравне со случайной:

$$\boxed{\sigma^2_{\text{полн}} = \sigma^2_{\text{инстр}} + \sigma^2_{\text{случ}}.} \tag{13}$$

Обратим внимание на важную особенность формулы (13). Пусть одна из ошибок, например, $\sigma_{\text{случ}}$ в 2 раза меньше другой — в нашем случае $\sigma_{\text{инстр}}$. Тогда

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{инстр}} + \sigma^2_{\text{случ}}} = \sqrt{\frac{5}{4}}\sigma_{\text{инстр}} \approx 1{,}12\,\sigma_{\text{инстр}}.$$

В нашем примере $\sigma_{\text{полн}} \approx \sigma_{\text{инстр}}$ с точностью 12%. Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже если она составляет половину от неё. Следовательно, в том случае, когда случайная ошибка опытов хотя бы вдвое меньше инструментальной (систематической), нет смысла производить многократные измерения, так как полная погрешность опыта при этом практически не уменьшается. Измерения достаточно произвести 2–3 раза, чтобы убедиться, что случайная ошибка действительно мала.

То же самое относится и к любым двум погрешностям, складываемым среднеквадратично (см., например, ниже формулу для погрешности суммы): если одна из ошибок в два или более раза меньше другой, то меньшую ошибку можно считать пренебрежимо малой и отбросить её.

1.9. Обработка результатов при косвенных измерениях

Погрешность суммы. Если исследуемая величина представляет собой сумму или разность двух измеренных величин

$$z = x \pm y, \tag{14}$$

то наилучшее значение величины a равно сумме (или разности) наилучших значений слагаемых: $z_{\text{наил}} = x_{\text{наил}} \pm y_{\text{наил}}$, или, считая средние значения величин наилучшими,

$$z_{\text{наил}} = \langle x \rangle \pm \langle y \rangle\,. \tag{15}$$

Здесь и в дальнейшем будем пользоваться стандартными в физике обозначениями: угловые скобки (или черта сверху) означают усреднение. Вместо того, чтобы писать $x_{\text{ср}}$, будем пользоваться обозначением $\langle x \rangle$ (или $\bar{x}$) и т. д.

Среднеквадратичная погрешность σ_z, если величины x и y независимы, находится, как уже было сказано, по формуле

$$\boxed{\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.} \tag{16}$$

Погрешность произвольной функции одной переменной. Если величина x измерена с малой погрешностью Δx ($\Delta x \ll x$), то отклонение значения функции $z = f(x)$ от среднего при $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ может быть, согласно определению производной, записано как

$$\Delta z \approx \frac{df}{dx}\Delta x.$$

Тогда для среднеквадратичного отклонения можно записать:

$$\boxed{\sigma_z = \left|\frac{df}{dx}\right| \sigma_x.} \tag{17}$$

Например,
$$\sigma_{\ln x} = \frac{\sigma_x}{x}, \qquad \sigma_{e^x} = e^x \sigma_x.$$

Погрешность в общем случае. Пусть $z = f(x,y,\ldots)$. Тогда для наилучшего значения имеем

$$z_{\text{наил}} = f\big(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \ldots\big).$$

Согласно математическому анализу, малые приращения функций многих переменных складываются независимо, и для функции многих переменных справедливо разложение

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \ldots,$$

где под символом $\frac{\partial f}{\partial x}$ понимается частная производная, т. е. обычная производная от f по x, взятая при условии, что все остальные аргументы функции f, кроме x, считаются константами. Отсюда формулу для расчёта результирующей погрешности нетрудно получить комбинируя (16) и (17):

$$\boxed{\sigma_z = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 \sigma_x^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2 \sigma_y^2 + \ldots}} \tag{18}$$

Выпишем часто встречающийся частный случай формулы (18), когда

$$z = x^\alpha \cdot y^\beta \cdot \ldots \tag{19}$$

Вводя относительные среднеквадратичные ошибки $\varepsilon_x = \sigma_x/x$, $\varepsilon_y = \sigma_y/y$ и подставляя (19) в (18), можно после некоторых преобразований получить

$$\boxed{\varepsilon_z^2 = \alpha^2\varepsilon_x^2 + \beta^2\varepsilon_y^2 + \ldots} \tag{20}$$

Произведение и частное. В простейших случаях

$$z = xy \qquad \text{и} \qquad z = x/y$$

имеем

$$\varepsilon_z^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2,$$

или

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2.} \tag{21}$$

Таким образом, при вычислении произведения или частного относительные среднеквадратичные погрешности складываются квадратично.

Рассмотрим некоторые следствия, которые могут быть получены из анализа формул, приведённых в этом разделе. Прежде всего заметим, что следует избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух больших чисел. Так, толщину стенки трубы лучше измерять непосредственно, а не определять, вычитая внутренний диаметр из внешнего (и, конечно, деля результат пополам). Относительная погрешность измерения, которая обычно представляет главный интерес, при этом сильно увеличивается, так как измеряемая величина — в нашем случае толщина стенки — мала, а ошибка в её определении находится путём сложения погрешностей измерения обоих диаметров и поэтому возрастает. Следует также помнить, что погрешность измерения, которая составляет, например, 0,5% от величины внешнего диаметра, может составить 5% и более от толщины стенки.

При измерениях, которые затем обрабатываются по формуле (21) (например, при определении плотности тела по его массе и объёму), следует определять все измеряемые величины с приблизительно одинаковой относительной точностью. Так, если объем тела измерен с погрешностью 1%, то при взвешивании с погрешностью 0,5% его плотность определяется с точностью 1,1%, а при взвешивании с погрешностью 0,01% — с точностью 1%, т. е. с той же практически точностью. Тратить силы и время на измерение массы тела с точностью 0,01% в этом случае, очевидно, не имеет смысла.

При измерениях, которые обрабатываются по формуле (19), следует обращать главное внимание на точность измерения величины, входящей в расчётную формулу с наибольшим показателем степени (см. формулу (20)).

Прежде чем приступить к измерениям, всегда нужно подумать о последующих расчётах и выписать формулы, по которым будут рассчитываться погрешности. Эти формулы позволят понять, какие измерения следует производить особенно тщательно, а на какие не нужно тратить больших усилий.

2. Представление результатов работы

2.1. Правила округления

Запись числовых значений, полученных в результате измерений, отличается от стандартной записи чисел, принятой в арифметике. При десятичной записи результата важно следить за тем, какие цифры соответствуют реально измеренным в эксперименте, а какие возникли исключительно в результате математических операций и находятся за пределами точности опыта.

Все цифры, начиная с первой ненулевой, называют *значащими*. Для корректной записи результата необходимо следить, чтобы количество значащих цифр было согласовано с погрешностью измерения. Перечислим правила, которыми необходимо руководствоваться при записи результатов:

- сама величина погрешности обычно лишь оценивается и определена с точностью не более 20%, поэтому величину ошибки нужно округлять до одной–двух значащих цифр:

правильно:	± 3,	$\pm 0{,}2$,	$\pm 0{,}08$,	$\pm 0{,}14$
неправильно:	$\pm 3{,}2$,	$\pm 0{,}239$,	$\pm 0{,}084$,	$\pm 0{,}14349$.

  Величину $\pm 0{,}14$ не следует округлять до $\pm 0{,}1$, так как при этом округлении погрешность изменяется на 40%.

- последняя цифра записи результата измерения должна быть того же разряда, что и в погрешности:

правильно:	$1{,}2430 \pm 0{,}0012$,	$1{,}24 \pm 0{,}03$,	$5{,}2 \pm 0{,}2$
неправильно:	$1{,}243 \pm 0{,}0012$,	$1{,}243 \pm 0{,}03$,	$5{,}2 \pm 2$.

- Ноль на конце десятичного числа является значащей цифрой! Запись $l = 1{,}4$ м не эквивалентна $l = 1{,}40$ м, т. к. последняя подразумевает в 10 раз большую точность измерения. Также не эквивалентны, например, $m = 1$ т и $m = 1000$ кг.

- Если выбранная система единиц не позволяет удовлетворить вышеизложенным правилам, то необходимо воспользоваться нормальной формой записи числа (называемой также иногда научной или экспоненциальной) — например, если вес тела определён с точностью 0,5 кг и составляет $58{,}3 \pm 0{,}5$ кг, то его можно выразить в граммах: $(583 \pm 5) \cdot 10^2$ г. Некорректно было бы написать $58\,300 \pm 500$ г, поскольку такая запись формально подразумевает превышение точности как в измеренной величине, так и в оценке погрешности.

- Если погрешность физической величины не указана, то подразумевается, что она измерена с точностью до изменения последней значащей цифры на единицу. Например, запись $l = 1{,}42$ м эквивалентна $l = 1{,}42 \pm 0{,}01$ м или $l = 142 \pm 1$ см (но не эквивалентна $l = 1420$ мм или $l = 1420 \pm 10$ мм).

В промежуточных вычислениях, проводимых вручную, необходимо сохранять одну лишнюю значащую цифру, чтобы избежать ненужных ошибок округления. При вычислениях на калькуляторе необходимо следить, чтобы значащие цифры не вышли за пределы разрядности, для этого необходимо пользоваться только инженерными/научными калькуляторами, которые не имеют ограничений по разрядности и способны к представлению чисел в экспоненциальном (научном) виде. При использовании таких простых компьютерных средств обработки данных, как электронные таблицы (типа Excel), также необходимо следить, чтобы в результате промежуточных вычислений не потерялись значащие цифры (специализированные средства обработки статистических и экспериментальных данных об этом заботятся сами).

2.2. Анализ результатов эксперимента

По измеренным в учебной лаборатории результатам обычно необходимо сделать вывод о справедливости некоторого закона или сравнить измеренное значение с табличными данными. Сравнение должно осуществляться на основании оценки погрешности σ вашего эксперимента, с учётом того, что табличные данные есть тоже результат некоторого эксперимента, обычно существенно более точного, чем учебный.

Если отклонение полученного вами результата от ожидаемого превышает 2σ, то (при условии, что σ — погрешность конечного результата — оценена вами правильно) можно говорить о том, что с вероятностью 95% в эксперименте обнаружено отклонение от исследуемого закона или табличного значения измеренной вами величины. В таком случае имеет смысл задуматься над тем, какие особенности вашего опыта могли бы послужить причиной такого расхождения.

Заметим, что если значения отличаются от ожидаемых в несколько раз или тем более на несколько порядков, то в первую очередь необходимо искать ошибки в своих вычислениях (типичная ошибка студента — неправильный расчёт размерностей физических величин).

2.3. Построение и обработка графиков

Для построения графиков вручную следует использовать специальную бумагу: в клетку, миллиметровую, логарифмическую или полулогарифмическую. Размер графика не должен быть очень малым или очень большим. Лучше если он будет иметь размер от четверти до половины листа А4.

Для построения графиков с помощью компьютера необходимо использовать специализированное программное обеспечение, предназначенное для обработки экспериментальных данных и способное отображать не только экспериментальные точки, но и «кресты» погрешностей, проводить наилучшую прямую по методу наименьших квадратов (см. ниже), оценивать результирующую погрешность и т. д.

Приведённые ниже советы касаются в равной степени как построения графиков вручную, так и при помощи компьютера.

При построении графика, прежде чем наносить точки, нужно выбрать подходящий масштаб и начало отсчёта на осях координат. Желательно, чтобы наносимые точки располагались на всей площади листа.

По осям координат должны быть обозначены откладываемые функции и единицы измерения. Не обязательно наименовать все деления шкалы, но надо сделать столько надписей, чтобы ими было легко и удобно пользоваться. Писать их лучше на внешней стороне осей координат. Если используется бумага с сеткой, имеющей линии различной толщины, то на жирных линиях лучше располагать круглые значения величин. Наименование величины, откладываемой по оси абсцисс, пишется снизу у конца оси, а по оси ординат — вверху слева. Через запятую указывается единица измерения.

Точки, наносимые на график, должны изображаться чётко и ясно — лучше использовать специальные символы (звездочки, квадратики и т. д.), чтобы отличить экспериментальные точки от случайно поставленных помарок. Их следует наносить карандашом, чтобы можно было исправить при обнаружении ошибок. Не следует делать никаких загромождающих график больших пояснительных надписей или указывать около точек их числовые значения. Если пояснения необходимы, то точка или линия обозначаются цифрой и в тексте или на полях графика делается соответствующее пояснение. Точки, полученные в различных условиях, например, при нагревании и охлаждении, при увеличении и уменьшении нагрузки и т. д., полезно наносить различными значками или цветами.

При нанесении на график экспериментальных точек, для которых известны погрешности, **необходимо указывать эти погрешности** отрезками линий, величина которых соответствует величине погрешно-

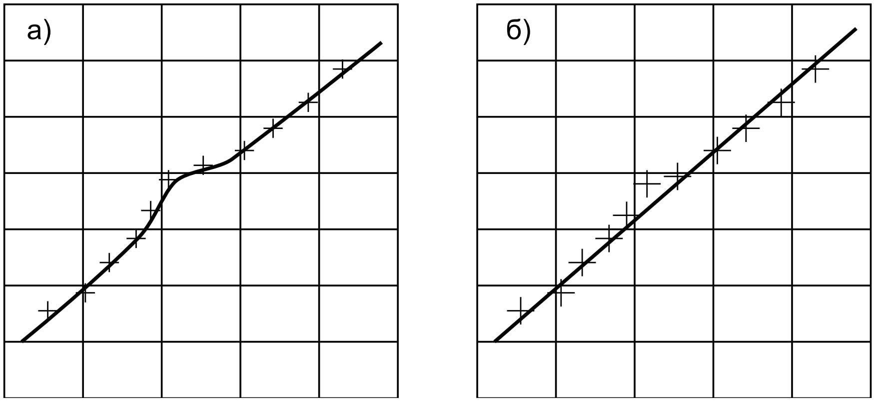

Рис. 2. Проведение линии по экспериментальным точкам

сти по каждой из переменных, определяющих точку. В таком случае *экспериментальной точке на графике соответствует крест.* Половина размера креста по горизонтали должна быть равна погрешности по оси абсцисс, а половина размера по вертикали — погрешности по оси ординат. В том случае, если одна из погрешностей — из-за своей малости — не может быть изображена графически, результаты изображаются чёрточками, вытянутыми на $\pm\sigma$ в том направлении, где погрешность не мала. Такое изображение экспериментальных точек необходимо для корректного анализа результатов, в частности, поиска зависимостей, наилучшим способом их описывающих, сравнение с теоретическими расчётами или результатами других исследований.

На рис. 2а, б, на которых изображены одни и те же экспериментальные точки при разных погрешностях измерений, график 2а, несомненно, указывает на нерегулярный ход изучаемой зависимости. Эта зависимость изображена на рисунке кривой линией. Те же данные при больших погрешностях опыта (рис. 2б) с успехом описываются прямой линией, так как только одно измерение отступает от этой прямой больше, чем на стандартную погрешность (и меньше, чем на две такие погрешности). То обстоятельство, что данные на рис. 2а требуют проведения кривой линии, а на рис. 2б не требуют, проясняется лишь при изображении результатов в виде креста погрешностей.

Функциональные зависимости. Часто измерения проводятся с целью получения или подтверждения зависимостей между измеряемыми величинами. В этих случаях необходимо по экспериментальным точкам провести соответствующую зависимость и, если нужно, найти погрешности измеряемых величин по разбросу экспериментальных точек. Легче всего по экспериментальным точкам проводить *прямую линию.* Поэтому если из теории или некоторых предположений известна возможная зависимость между измеряемыми величинами, то по осям координат надо отложить такие функции измеряемых величин, которые лучше соответствуют линейной зависимости.

Например, при исследовании зависимости времени падения t в поле тяжести от высоты h, с которой оно падает, по осям нужно отложить h и t^2, так как в однородном поле тяжести без учёта сопротивления воздуха квадрат времени падения пропорционален высоте падения: $h = gt^2/2$. Тогда ускорение определится из графика $h(t^2)$ просто как удвоенный угловой коэффициент наклона прямой.

Другой пример — часто встречающаяся (например, в химии) зависимость $y = A\exp(-a/x)$. Чтобы определить коэффициенты A и a необходимо построить график в координатах (u,v), где $u = \ln y$, $v = 1/x$. Тогда несложно получить, что $u = \ln A - av$, и экспериментальные точки на графике в этих координатах должны ложиться на прямую.

Отметим особо логарифмический и полулогарифмический масштаб, когда по одной или по каждой из осей откладываются логарифмы соответствующих величин. Он удобен, в частности, в случае степенных зависимостей и больших диапазонов изменения переменных. Получающиеся линейные зависимости позволяют по графику найти показатель степенной зависимости.

Отдельно стоит вопрос о том, можем ли мы по измеренным на опыте значениям считать, что предполагаемая теоретическая зависимость подтверждена или опровергнута. Это один из важнейших вопросов теории обработки экспериментальных данных, существуют разные критерии для ответа на этот вопрос — из самых распространённых можно назвать *критерий* χ^2 (*хи-квадрат*). Желающие могут ознакомиться с ним по соответствующим учебникам [2, 3].

2.3.1. Проведение наилучшей прямой

Графический метод. Существуют различные методы проведения прямых линий через экспериментальные точки. Самый простой способ, пригодный для оценки результатов, состоит в использовании прозрачной линейки или прозрачного листа с нарисованной на нем прямой линией. Благодаря прозрачности линейки видно, сколько точек находится по обе стороны от проводимой линии. Её надо провести так, чтобы по обе стороны было одинаковое количество экспериментальных точек. Параметры этой линии (наклон, пересечения с осями координат) измеряются непосредственно на графике. В результате получаем аналитическое выражение прямой $y = a + bx$, которая в общем случае при a, не равном нулю, не проходит через начало координат.

Случайные погрешности определения a и b можно оценить по графику следующим образом. Для оценки погрешности a находим величины, на которые надо параллельно сместить линию, чтобы число точек по обе стороны относилось, как 1 : 2 (рис. 3). То есть при смещении линии вверх по y на Δa_1 выше линии находится в два раза меньше точек, чем ниже её, а при смещении вниз на Δa_2 ниже её находится в два раза

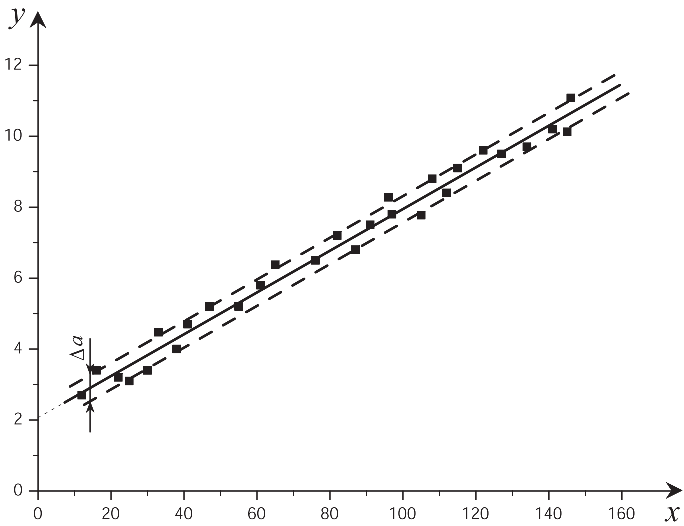

Рис. 3. Графический метод обработки результатов. Оценка случайной погрешности параметра a

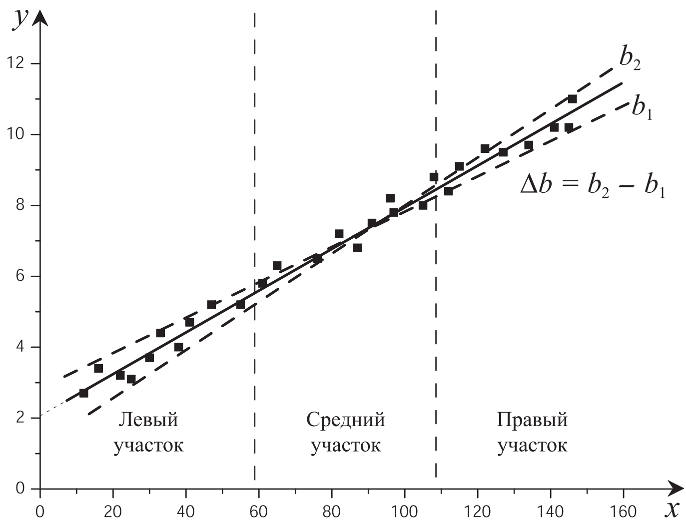

Рис. 4. Графический метод обработки результатов. Оценка случайной погрешности параметра b

меньше точек, чем выше. Если всего экспериментальных точек n, то для оценки погрешности a имеем

$$\sigma_a = \frac{\Delta a}{\sqrt{n}}.$$

Для оценки погрешности коэффициента b надо диапазон изменения координаты x экспериментальных точек разделить на три равные части и поворачивать линию таким образом, чтобы в крайних частях соотношения числа точек на разных сторонах линии было $1:2$ (рис. 4). То есть увеличиваем наклон линии до значения b_1 так, чтобы в левом крайнем участке над линией оказалось в два раза больше экспериментальных точек, чем под ней, а в правом крайнем участке под линией оказалось в два раза точек больше, чем над ней. Затем уменьшаем наклон линии до b_2 так, чтобы в левом крайнем участке под линией было в два раза больше точек, чем над ней, а в правом участке было под линией в два раза меньше точек, чем над ней. Для оценки погрешности b имеем

$$\sigma_b = \frac{\Delta b}{\sqrt{n}}.$$

В случае зависимости $y = kx$, проходящей через начало координат, для оценки погрешности коэффициента k также надо диапазон изменения координаты x разбить на три равные части. Точки в ближайшей к началу координат части не учитываются. Определяется k_1, при котором над линией находится точек в два раза меньше, чем под ней (из всех точек в средней и правой частях), и k_2, при котором соотношение числа точек над и под линией противоположное. Для оценки погрешности k имеем

$$\sigma_k = \frac{k_1 - k_2}{\sqrt{n}}.$$

Метод наименьших квадратов (МНК). Более точным и обоснованным методом проведения прямой линии по точкам является *метод наименьших квадратов*, который основан на минимизации суммы квадратов отклонений точек от прямой. Это означает, что коэффициенты a и b в линейной зависимости $y = a + bx$ находятся из условия минимума функции

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \big[y_i - (a + bx_i)\big]^2. \tag{22}$$

Здесь x_i и y_i — координаты экспериментальных точек.

Приведём окончательные формулы для a и b и их погрешностей через средние значения x_i и y_i:

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \tag{23}$$

$$a = \langle y \rangle - b \langle x \rangle . \tag{24}$$

Ошибки этих коэффициентов соответственно равны:

$$\sigma_b \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2}, \tag{25}$$

$$\sigma_a = \sigma_b \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \tag{26}$$

Если известно, что точки должны описываться линейной зависимостью $y = kx$, проходящей через начало координат, то для коэффициента k и погрешности его определения получаем

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}, \tag{27}$$

$$\sigma_k \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2}. \tag{28}$$

Для ручной обработки этот метод довольно трудоёмкий, но при наличии калькулятора или компьютера он является наиболее предпочтительным.

Об ограничениях МНК. Метод наименьших квадратов имеет два существенных ограничения: во-первых, как несложно заметить, погрешность отдельного измерения никак не учитывается в МНК, во-вторых, он не способен учитывать возможную систематическую ошибку, а в-третьих, применение его обосновано лишь при достаточно большом количестве точек. Поэтому при оценке погрешности по формулам (25)–(28) следует быть осторожным: они не применимы в случае, когда количество точек мало, а погрешность измерения каждой точки велика или имеет преимущественно систематических характер. В этом случае необходимо при оценке погрешности пользоваться графическим методом (для проведения наилучшей прямой аналитические формулы (23), (24) вполне пригодны).

2.3.2. Экстраполяция и интерполяция

Бывают случаи, когда по экспериментальным точкам не надо находить описывающую их зависимость, а требуется определить лишь численное значение функции для переменной, лежащей где-то между экспериментальными точками. В таких случаях используются *интерполяционные* методы. В простейшем случае предполагается линейная зависимость между соседними точками и используются значения в этих точках. Для интерполяции по параболе (метод Симпсона) требуются значения в трёх точках.

Иногда возникает необходимость продолжить экспериментальный график за пределы измеренных значений. Такая операция называется *экстраполяцией*. Не существует каких-либо общих методов её проведения — экстраполяция должна выполняться исходя из конкретных теоретических предположений о возможном ходе функциональной зависимости. Чем дальше от экспериментальных данных проводится экстраполяция, тем, очевидно, меньше степень её достоверности.

В заключение ещё раз подчеркнём, что графики необходимы для наглядного представления результатов измерений. Они очень удобны для сравнения результатов экспериментов и теорий, выяснения качественных особенностей зависимостей, быстрых оценок характера изменения величин на отдельных участках. Однако *документом эксперимента является таблица с экспериментальными данными.*

3. Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Результатом выполненной работы является отчёт, который должен содержать:

1) описание теоретических предпосылок выполняемого эксперимента с краткой сводкой необходимых формул и соотношений;
2) схему экспериментальной установки;
3) словесное описание хода эксперимента и таблицы для записи экспериментальных данных;
4) обработку результатов: вычисление расчётных величин и заполнение таблиц, построение графиков, вычисление результата эксперимента;
5) сравнение полученных результатов с известными (в литературе и справочниках), обсуждение возможных ошибок, предложения по улучшению эксперимента.

3.1. Подготовка к работе

Вначале нужно внимательно прочитать описание работы и теоретическое введение по её тематике. Это необходимо, чтобы получить представление о явлениях, закономерностях и порядках измеряемых величин, с которыми придётся иметь дело при выполнении работы, а также о методе измерения и используемых приборах, последовательности действий при проведении измерений.

Для записей результатов работы надо подготовить рабочую тетрадь, лучше большого формата, чтобы её можно было использовать в течение, по крайней мере, одного семестра. Оформление каждой работы нужно начинать с номера и названия. Далее должны быть представлены краткое изложение теории, схема установки и описание хода эксперимента.

Прежде чем приступить к выполнению работы, следует продумать предложенный в описании план действий, определить необходимое количество измерений. В соответствии с этим предварительно подготовить таблицы, в которые будут заноситься результаты.

Желательно заранее представлять диапазон изменения измеряемых величин и выбрать для них соответствующие единицы. В крайнем случае, это нужно сделать на начальном этапе работы. Необходимо подумать о точности измерений. Например, при косвенных измерениях величин, имеющих степенную зависимость от непосредственно измеряемых, относительная погрешность величин, входящих с бо́льшими показателями степени, должна быть меньше, то есть их следует измерять точнее. По возможности следует избегать методов, при которых приходится вычислять разность двух близких по значениям величин.

3.2. Начало работы

В начале работы необходимо тщательно ознакомиться с экспериментальной установкой, проверить работоспособность приборов. Нужно хорошо разобраться, как они регулируются, включаются и выключаются.

Всегда очень важно аккуратное и бережное обращение с приборами. Не следует вскрывать чувствительные приборы и менять настройку.

Все сведения о приборах (в первую очередь класс точности, максимальное значение на шкале, по которой производятся измерения, и цену деления) и условиях эксперимента необходимо записать в рабочей тетради, так как они потребуются при получении окончательных результатов.

При составлении (собирании) электрических схем источники питания подключаются к схеме в последнюю очередь.

Прежде чем приступить к основным измерениям, необходимо проверить работу установки. Первые измерения должны быть контрольными, чтобы убедиться, что все работает нормально, диапазон и точность измерений выбраны правильно. Если разброс повторных измерений не превышает инструментальную погрешность, то многократных измерений не требуется.

Замеченные неполадки в работе приборов и установок надо зафиксировать (делать соответствующую запись в тетради) и сообщить об этом преподавателю.

3.3. Проведение измерений

Все записи результатов измерений должны быть сделаны чётко и подробно, с нужными пояснениями.

Полезно строить предварительные графики зависимостей измеряемых величин между собой или от изменения параметров по мере получения результатов. При этом сразу выделяются области резких изменений, в которых измерения должны проводиться подробнее (больше точек), чем на участках плавного изменения. Если изучаемая закономерность, например линейность, выполняется только на некотором участке, то область измерений должна быть выбрана шире этого участка, чтобы можно было установить границы выполнения закономерности.

Если в начале работы выясняется, что разброс результатов измерений очень большой, то иногда лучше поискать и устранить причину этого, чем выполнять большое количество измерений для получения необходимой точности результата. При изучении зависимости измеряемой величины от параметра или другой измеряемой величины надо убедиться, что за время измерений в процессе работы не произошло никаких сбоев или существенных изменений внешних условий, влияющих на результаты, для чего в конце работы необходимо повторить начальные измерения либо проделать все измерения в обратном порядке.

Перед каждой таблицей должны быть указаны значения цены деления и класс точности каждого прибора, которым производятся измерения. В таблицу необходимо заносить число делений, а не саму величину, например, тока или напряжения. Это убережёт вас от ошибки при записи экспериментальных данных. В конечном счёте это главное, так как обработка данных может быть проведена разными способами и в любое время, а измерения воспроизвести бывает трудно, а иногда и невозможно.

Единицы измерения надо выбирать так, чтобы результаты измерения представлялись числами в диапазоне примерно от 0,1 до 1000. При этом таблицы не будут громоздкими, а графики будут удобными для использования. Например, для модуля Юнга металлов (обозначаемых буквой E), численные значения которых в системе СИ очень велики, в качестве единицы измерения берут 10^{10} Н/м^2. Тогда наименование графы таблицы или оси графика будет выглядеть следующим образом: E, 10^{10} Н$\cdot$м$^{-2}$. Запятая здесь играет важную роль — она отделяет обозначение величины, приводимой в таблице или откладываемой по оси координат, от единицы измерения. В графе таблицы для алюминия будет стоять 7,05, а на шкалах графиков — небольшие целые числа. Вместо множителя перед единицами измерения могут быть использованы также слова или их сокращения.

Иногда используется другой способ наименования. В таблицах или на осях графиков представляют не саму величину, а произведение её на некоторый коэффициент, которое измеряют в обычных единицах. Для модуля Юнга при этом получаем: $E \cdot 10^{-10}$, Н$\cdot$м$^{-2}$. Хотя и в данном случае в таблице для алюминия будет стоять 7,05, этот способ меньше используется из-за возможных ошибок при переходе к значению E, так как множитель по ошибке может быть отнесён к единицам измерения.

3.4. Расчёты, анализ и представление результатов

Полученные первичные результаты в виде таблиц и графиков используются для расчёта конечных значений величин и их погрешностей либо для нахождения зависимости измеряемых величин между собой. Все расчёты удобно проводить в той же рабочей тетради, где записаны первичные результаты измерений, и заносить в соответствующие свободные колонки таблиц с экспериментальными данными. Это поможет проводить проверку, анализ и сопоставление получаемого результата с исходными данными.

Для измеряемых величин окончательные результаты должны быть представлены в виде среднего значения, погрешности и количества проведённых измерений. В случае косвенных измерений для получения окончательного результата используются их зависимости от измеряемых величин, по которым вычисляют и средние значения и погрешности.

Для окончательной оценки качества полученных результатов измерений надо сравнить их с данными, приводимыми в справочниках.

Литература

1. Лабораторный практикум по общей физике Т. 1/ Под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004.

2. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. — М.: Мир, 1985.

3. *Сквайрс Дж.* Практическая физика. — М.: Мир, 1971.

Рекомендации по оформлению и обработке результатов

Полноценные примеры оформления лабораторных отчётов можно найти в [1]. Здесь мы приводим лишь некоторые конкретные примеры, рекомендации и комментарии, касающиеся базовых принципов обработки экспериментальных данных в первых двух работах сборника «Модели и концепции физики: механика. Лабораторный практикум.».

Работа 1.1. Определение скорости полета пули при помощи баллистического маятника

Проверка закона аддитивности массы

1. Согласно паспорту прибора, стандартная ошибка измерения массы пульки по электронным аналитическим весам может быть оценена как величина единицы последнего разряда весов: $\sigma_m \approx 1$ мг. Если весы при взвешивании первой пульки показывают 520 мг, то результат измерения её массы запишется как $m_1 = 520 \pm 1$ мг.

2. Результаты измерений масс пулек заносим в таблицу 1. Погрешность каждого результата составляет ± 1 мг.

Таблица 1

N	1	2	3	4	5	6	7	8
m_i, мг	520	528	533	543	532	535	540	538

3. Проверим, аддитивна ли операция взвешивания пулек в нашем эксперименте. Прямое взвешивание восьми пулек одновременно даёт следующий результат:

$$M = 4272 \text{ мг},$$

тогда как сумма по всем m_i равна M_Σ:

$$M_\Sigma = \sum_{i=1}^{N=8} m_i = 4269 \text{ мг}.$$

Результаты расходятся на $\Delta M = 3$ мг.

Чтобы проверить, нарушается ли аддитивность результатов взвешивания в нашей серии опытов, необходимо оценить ошибки измерения

M и M_Σ: $\sigma(M)$ и $\sigma(M_\Sigma)$. Ошибка для M есть ошибка одного взвешивания $\sigma(M) \approx 1$ мг.

Учитывая, что измерения масс пулек по отдельности являются независимыми, найдём ошибку M_Σ как

$$\sigma(M_\Sigma) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_8^2} = \sqrt{8}\sigma_m \approx 3 \text{ мг.}$$

Таким образом, результаты измерения масс должны быть записаны как

$$M_\Sigma = 4272 \pm 1 \text{ мг,} \qquad M_{\text{адд}} = 4269 \pm 3 \text{ мг.}$$

Исходя из чего можно сделать вывод, что в рамках точности эксперимента аддитивность взвешиваний в наших опытах выполнялась.

Усреднение статистических данных Рассмотрим отдельно вопрос о том, можно ли считать массу всех пулек из таблицы 1 одинаковой и заменить все m_i на некоторое среднее. Беглый взгляд на таблицу подсказывает, что разброс значений m_i превышает погрешность измерения отдельной массы $\sigma_m \approx 1$ мг, а значит, замена не правомерна. Подтвердим это количественным анализом.

Предположим, что массу случайно выбранной пульки можно считать случайной величиной, подчиняющейся нормальному закону распределения (правомерность этого предположения зависит, конечно, от того, как изготавливались эти пульки). Средняя масса из имеющегося набора измеренных значений есть

$$m_{\text{ср}} = \langle m \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N=8} m_i \approx 533{,}6 \text{ мг.}$$

Мера «разброса» данных есть стандартное отклонение массы одной пульки от среднего:

$$\sigma_{\text{разбр}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{n} (m_i - m_{\text{ср}})^2} \approx 7{,}3 \text{ мг.}$$

Таким образом, разброс данных существенно больше точности измерений: $\sigma_{\text{разбр}} \gg \sigma_m$.

Определение скорости полёта пули

Экспериментальные данные по отклонению баллистического маятника после выстрела приведены в таблице 2. Здесь x_0 — начальное положение шкалы перед выстрелом, x_k — максимальное отклонение по шкале после выстрела, $\Delta x = x_k - x_0$ — амплитуда колебаний баллистического маятника.

Ошибка измерения x_0 определяется амплитудой «нулевых» колебаний маятника относительно положения равновесия (которые невозможно до конца устранить) $\sigma_{x_0} \approx 0{,}4$ мм. Ошибка измерения отклонения

Т а б л и ц а 2

N	1	2	3	4	5	6	7	8
x_0, мм	$-4{,}0$	$-2{,}0$	$-2{,}2$	$-1{,}8$	$-2{,}2$	$-3{,}2$	$-2{,}4$	$-2{,}4$
x_k, мм	6,6	10,2	11,8	11,2	11,6	10,2	11,4	11,6
Δx, мм	10,6	12,2	14,0	13,0	13,8	13,4	13,8	14,0

x_k есть ошибка отсчёта по шкале, которую можно оценить как цену деления: $\sigma_{x_k} \approx 0{,}2$ мм. Тогда

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{\sigma_{x_k}^2 + \sigma_{x_0}^2} \approx 0{,}4 \text{ мм.}$$

В таблице 3 приведены результаты вычислений скорости пулек u по формуле

$$u = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{g}{L}}\,\Delta x,$$

где экспериментальные значения длины нитей маятника L и его массы M соответственно равны:

$$L = 221 \pm 1 \text{ см}, \qquad M = 2905 \pm 5 \text{ г.}$$

Относительная ошибка измерения скорости пули есть

$$\varepsilon_u = \frac{\sigma_u}{u} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2}. \tag{1}$$

Проанализируем, какая из относительных ошибок правой части выражения (1) даёт максимальный вклад в ε_u. Несложно увидеть, что ошибка измерения отклонения маятника $\sigma_{\Delta x}/\Delta x$ существенно превышает все остальные и составляет примерно $\varepsilon_{\Delta x} \sim 3 \div 4\%$. И таким образом, ошибка измерения скорости

$$\sigma_u \approx u\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}. \tag{2}$$

Таблица 3

N	1	2	3	4	5	6	7	8
u, м/с	125	141	161	146	159	153	156	159
σ, м/с	±5	±5	±5	±5	±5	±5	±5	±5

С чем связан разброс скоростей? Для ответа на вопрос о том, определяется ли разброс измеренных скоростей реальным разбросом при различных выстрелах или он возникает исключительно из-за ошибки измерений, найдём среднее значение скорости пули и разброс отдельных измеренных значений u_i относительно среднего (среднеквадратичное отклонение *отдельного* измерения) $\sigma_u^{\text{разбр}}$:

$$u_{\text{ср}} \approx 150 \text{ м/с}, \quad \sigma_u^{\text{разбр}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - u_{\text{ср}})^2} \approx 12 \text{ м/с}.$$

Откуда видим, что стандартное отклонение экспериментальных данных от среднего превышает почти в 2,5 раза ошибку в каждом акте измерения скорости. Это довольно большое отклонение (вероятность по распределению Гаусса порядка 1%), и таким образом можно утверждать, что наблюдаемый разброс скоростей скорее всего связан с различием скоростей от выстрела к выстрелу. Однако для более точного ответа на поставленный вопрос имеющейся статистики очевидно недостаточно и необходимо произвести больше измерений.

Работа 1.2. Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса

Рекомендации по графической обработке экспериментальных данных

Измерения по пункту 10 задания работы 1.2 проводились для двух половинок дисков массами $m_1 = 737{,}7$ г и $m_2 = 738{,}9$ г. Экспериментальные данные представим в виде таблицы 4.

Момент инерции здесь находим по формуле: $I = kmT^2 - I_0$, где $m = m_1 + m_2$ — суммарная масса двух половинок диска и пустой платформы, $k \approx grR/(4\pi^2 z_0) \approx (4{,}00 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-4}$ м^2/с^2 — константа установки (см. формулу (11) описания работы), а $I_0 \approx 2{,}67 \pm 0{,}05$ г $\cdot$ м^2 — момент инерции ненагруженной платформы, измеренный ранее.

Таблица 4

N опыта	h, см	T, с	I, г $\cdot$ м^2
1	0,0	2,48	1,78
2	0,5	2,47	1,74
3	1,0	2,50	1,86
4	1,5	2,54	2,00
5	2,0	2,62	2,30
6	2,5	2,71	2,63
7	3,0	2,79	2,97
8	3,5	2,91	3,46
9	4,0	3,05	4,07
10	4,5	3,16	4,56
11	5,0	3,31	5,26
12	5,5	3,47	6,05
13	6,0	3,62	6,82
14	6,5	3,80	7,79
15	7,0	3,95	8,63

По теореме Гюйгенса–Штейнера должно выполняться $I(h) = I_c + mh^2$. Исходя из того, чтобы точки графика ложились на прямую, отложим по горизонтальной оси h^2, а по вертикальной — $I(h)$, т. е. построим зависимость $I = f(h^2)$ и проведём по точкам наилучшую прямую (рис. 1).

Угловой коэффициент найдём по методу наименьших квадратов. Расчёт по формуле (23) Введения с заменой x на h^2 и y на I даёт значение суммарной массы (с учётом размерности отложенных по осям физических величин!):

$$m = \frac{\langle Ih^2 \rangle - \langle h^2 \rangle \langle I \rangle}{\langle h^4 \rangle - \langle h^2 \rangle^2} \approx 0{,}1418 \text{ г} \cdot \text{м}^2/\text{см}^2 = 1{,}418 \text{ кг}.$$

По пересечению графика наилучшей прямой с осью ординат найдём момент инерции цилиндра в исходном состоянии при $h = 0$: по формуле (24) Введения получим $I_c = 1{,}73$ г $\cdot$ м^2.

Оценим ошибку измерения массы по методу наименьших квадратов (формула (25) Введения):

$$\sigma_m \approx \frac{1}{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle h^4 \rangle - \langle h^2 \rangle^2} - m^2} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

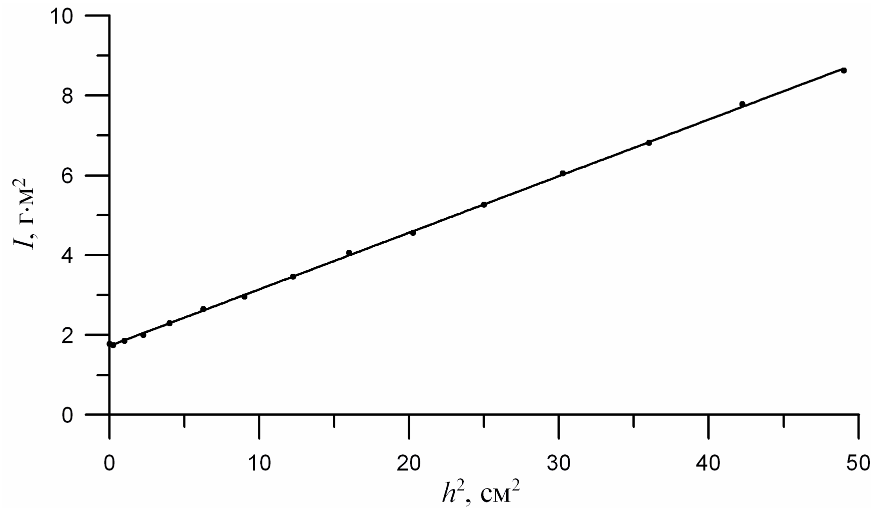

Рис. 1

Из чего видно, что относительная ошибка в измерении массы при оценке по МНК составляет $\varepsilon_m = 0{,}4\%$. Однако погрешность измерения h составляет как минимум 1 мм, следовательно, относительная ошибка для h должна быть не менее 1,5% (для $h = 7$ см), а для h^2 — не менее 3%. Ясно, что оценка по МНК сильно завышает реальную точность измерения (см. комментарии к данному методу во Введении).

В данном случае, поскольку ошибка отдельного измерения велика и имеет доминирующую систематическую составляющую, правильнее было бы воспользоваться графическим методом оценки погрешности результатов измерения.

Изобразим каждую точку на графике в виде «креста ошибок». Погрешность измерения I мала и потому на графике будет не заметна. Погрешность измерения h оценим как: $\sigma_h \approx 1$ мм. Тогда погрешность h^2, то есть полуширину креста ошибок по оси абсцисс, найдём с учётом соотношения $\varepsilon_{h^2} = 2\varepsilon_h$, откуда получим $\sigma_{h^2} = 2h\sigma_h$.

Проведя две дополнительные прямые (рис. 2), найдём погрешность углового коэффициента:

$$\sigma_m \sim \frac{m_{\max} - m_{\min}}{\sqrt{N}} \approx \frac{1{,}48\text{ кг} - 1{,}37\text{ кг}}{\sqrt{15}} \approx 0{,}03\text{ кг},$$

где множитель $1/\sqrt{N}$ отражает то, что мы оцениваем погрешность некоторой средней величины по N измерениям. Погрешность определения

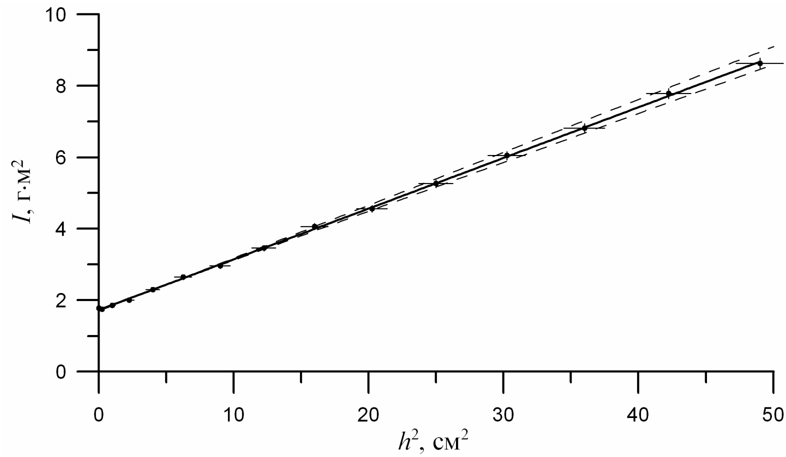

Рис. 2

точки пересечения прямой с осью ординат есть (рис. 3):

$$\sigma_{I_c} \sim \frac{I_{c1} - I_{c2}}{\sqrt{N}} \approx 0{,}08 \text{ г} \cdot \text{м}^2.$$

Окончательный результат измерения запишется в следующем виде:

$$m = 1{,}42 \pm 0{,}03 \text{ кг}, \qquad I_c = 1{,}73 \pm 0{,}08 \text{ г} \cdot \text{м}^2.$$

Сравним полученные ответы со значениями, измеренными альтернативными способом.

1. Масса диска, измеренная на весах, равна $m_0 = 1476{,}6 \pm 0{,}2$ г, что с точностью в примерно два стандартных отклонения совпадает с результатом $m = 1{,}42 \pm 0{,}03$ кг.

2. Момент инерции диска рассчитаем исходя из значений диаметра D диска по формуле $I = mD^2/8$. Измерения диаметра диска с помощью штангенциркуля обнаруживают, что его сечение имеет форму, несколько отличную от окружности, что приводит к систематической погрешности: среднее значение D равно 9,4 см, разброс составляет $\pm 0{,}1$ см. При этом относительная систематическая ошибка измерения D равна $\varepsilon_D \approx 1\%$. Относительная ошибка вычисления момента инерции I тогда составит $\varepsilon_I \approx 2\%$ (в качестве значения массы возьмём измеренное на весах m_0 — это измерение существенно более точное и его вкладом в ошибку вычисления I можно пренебречь),

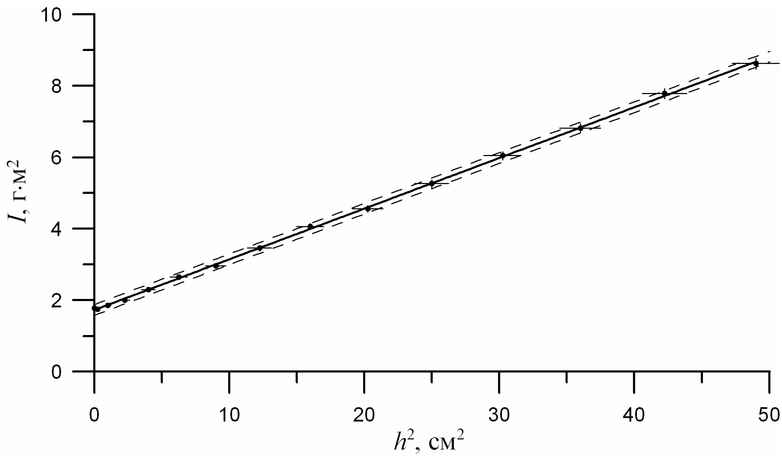

Рис. 3

и его значение запишется как $I = 1{,}63 \pm 0{,}03$ г $\cdot$ м^2. С учётом проведённой оценки погрешности полученный результат также можно считать с достаточной долей вероятности (соответствующей примерно двум стандартным отклонениям) совпадающим с измеренным на трифилярном подвесе $I = 1{,}73 \pm 0{,}08$ г $\cdot$ м^2.

Литература

1. *Лабораторный практикум по общей физике.* Т. 1. Механика / под ред. А. Д. Гладуна. — М.: МФТИ, 2004.Работы 1.1.1–1.1.5.