

Описание работы с программой Kinematik.

1. Введение
2. Интерфейс программы
3. Методы проведения опытов
4. Описание оптоэлектронного датчика
5. Обработка кинематических измерений
6. Краткая инструкция использования программы
7. Приложение

1. Введение

Программа Kinematik написана для автоматизации процесса кинематических измерений в лабораторной работе с маятником Обербека. Основная цель в этой лабораторной работе заключается в экспериментальной проверке динамического закона вращательного движения. Для этой цели необходимо измерять момент сил вызывающих вращение маятника и его угловое ускорение. И если экспериментальное определение вращательного момента сил в работе с достаточной точностью можно провести относительно просто, то корректное измерение углового ускорения маятника может оказаться затруднительным. Наиболее простой способ предполагает рассматривать движение маятника как равноускоренное и использовать простую закономерность для связи пройденного пути, времени и ускорения. Однако, даже оставаясь в рамках такой модели и проводя измерения времени движения и пройденного пути вручную, достаточно сложно выдержать приемлемую точность определения ускорения. По этим причинам студентам нечасто удаётся успешно выполнить данную работу.

Одним из способов повышения точности кинематических измерений и их информативности является автоматизация измерений. При этом сразу необходимо оговорить, что реализованный вариант автоматизации позволяет проводить измерения только относительно небольшой части данных требуемых в работе. Автоматизация не предполагает проведения всех вычислений необходимых для выполнения лабораторной работы. Программа Kinematik, обеспечивает корректное определение углового ускорения маятника используемого в работе, а также предоставляет возможность зафиксировать, как изменялись в процессе движения маятника его угловая скорость и угловое ускорение.

Для измерений используется оптоэлектронная пара на основе лазера и фотодиода. В процессе движения маятника его спицы пересекают лазерный луч, освещающий фотодиод. При вращении маятника на выходе схемы фотодиода формируется последовательность электрических импульсов, поступающих на параллельный порт компьютера. Программа Kinematik обрабатывает сигналы, поступающие на параллельный порт.

Непосредственно измеряемыми величинами являются значения времени в моменты перекрытия лазерного луча спицами маятника. Помимо этого также фиксируется угол поворота маятника, с шагом равным четверти оборота - для крестообразного маятника, у которого 4 спицы. Таким образом, угол поворота и время поворота являются непосредственно измеряемыми величинами. Производные величины: угловая скорость и угловое ускорение вычисляются косвенно по имеющейся зависимости угла поворота от времени.

2. Интерфейс программы

Интерфейс программы представлен в текстовом режиме в виде упрощённого диалога (Рис. 1). Программа предлагает краткий список допустимых на текущий момент действий, из которых можно выбрать один из пунктов. Все действия перенумерованы, выбор осуществляется нажатием на клавишу с соответствующей цифрой. Кроме текстового режима имеется 2 пункта с графическим представлением данных - просмотр кинематических зависимостей и режим балансировки маятника.

```
Выберите требуемое действие из списка:
0 - Краткое описание работы с программой
1 - Начать новый опыт
2 - Ввод параметров текущего опыта
3 - Провести балансировку маятника
4 - Провести измерения
5 - Просмотр кинематических зависимостей для текущего опыта
6 - Вывод данных измерений текущего опыта
7 - Выбор номера текущего опыта
8 - Показать количество проведённых опытов и номер текущего опыта
9 - Записать данные текущего опыта в файл
R - Прочитать данные из файла в текущий опыт
```

Рис. 1 Вид текстового интерфейса программы

Пункты основного меню

0 - Краткое описание работы с программой - Производит выдачу на экран текста данного описания программы, которое вы сейчас читаете. Навигация по тексту описания производится с помощью клавиш со стрелками вверх и вниз. Выход - по нажатию Esc.

1 - Начать новый опыт - Осуществляет инициализацию нового опыта. При этом последовательно выпадают 4 запроса к пользователю с предложением ввести параметры опыта. (Радиус шкива, расстояние грузов от оси маятника и массу перегрузки используемых для нового опыта) Кроме этого, предлагается ввести число отсчётов, по достижению которого программа прекратит измерения. Число отсчётов равно числу полных оборотов, которые совершит маятник в процессе измерений. Рекомендуемые значения для большого шкива - 15, для малого - 25.

2 - Ввод параметров текущего опыта - Позволяет изменить параметры текущего опыта без объявления нового. При этом старые значения параметров удаляются.

3 - Провести балансировку маятника - Предоставляет возможность произвести динамическую балансировку маятника. На экране отображаются два графика: временная развёртка угловой скорости и ускорения вращения маятника, выраженные в условных единицах. Приводя маятник без груза в свободное вращение, на экране можно наблюдать, как меняются текущая скорость и ускорение. Обновление графиков происходит каждый раз, как только спица маятника пересечёт луч датчика. Скорость и ускорение вычисляются по времени, в течение которого спица перекрывает луч. Считая спицы одинаковыми по толщине можно определить скорость маятника в 4 разных фазах его вращения как обратные величины к измеренным временам. Оценка ускорения вычисленная, как разница скоростей в два последовательных момента времени позволяет

более отчётливо фиксировать неравномерность вращения маятника. Поскольку требуется следить только за общим характером движения, а именно - за неравномерностью кривых скорости и ускорения, то достаточно представления этих величин в условных единицах.

Хорошо сбалансированный маятник не имеет неравномерного поведения ускорения в времени. Нажав кнопку Enter можно остановить обновление графиков. Повторно нажав Enter - возобновить обновление графиков. Выход из режима балансировки осуществляется по нажатию кнопки Esc. Если обновление остановлено, то для выхода Esc нужно нажать 2 раза подряд.

4 - Провести измерения - Осуществляет проведение измерений для текущего опыта. При этом, сначала, производится тест оптической связи лазер-приёмник и в случае успеха поступает предложение нажать любую клавишу для непосредственного старта измерений. В случае если связь лазер-приёмник не установлена, (предполагается, что спица покоящегося маятника может перекрывать луч) программа предлагает немного проверить маятник. См. ниже рекомендации по проведению измерений.

5 - Просмотр кинематических зависимостей для текущего опыта - Программа отображает на экран кинематические графики, полученные в результате обработки результатов измерений текущего опыта. (Рис. 2) Отображаемые зависимости: угол поворота от времени $\varphi(t)$, угловая скорость от времени $\omega(t)$, угловое ускорение от времени $\beta(t)$ и корреляция между угловым ускорением и угловой скоростью $\beta(\omega)$, позволяющая получить представление о влиянии вязкого трения в эксперименте. Выход из режима просмотра графиков осуществляется по нажатию Esc.

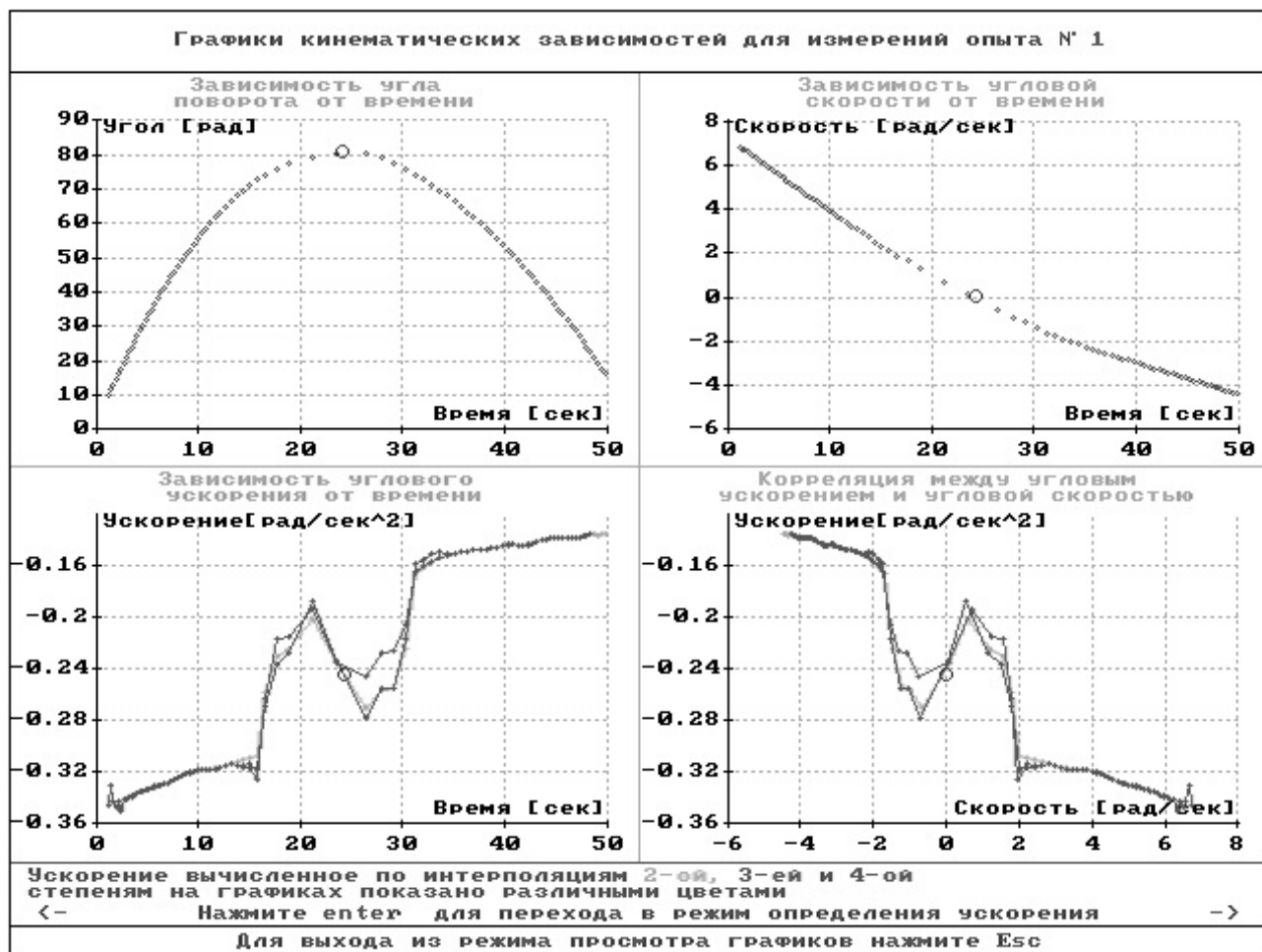


Рис. 2 Характерный вид кинематических зависимостей в программе 'Kinematik'.

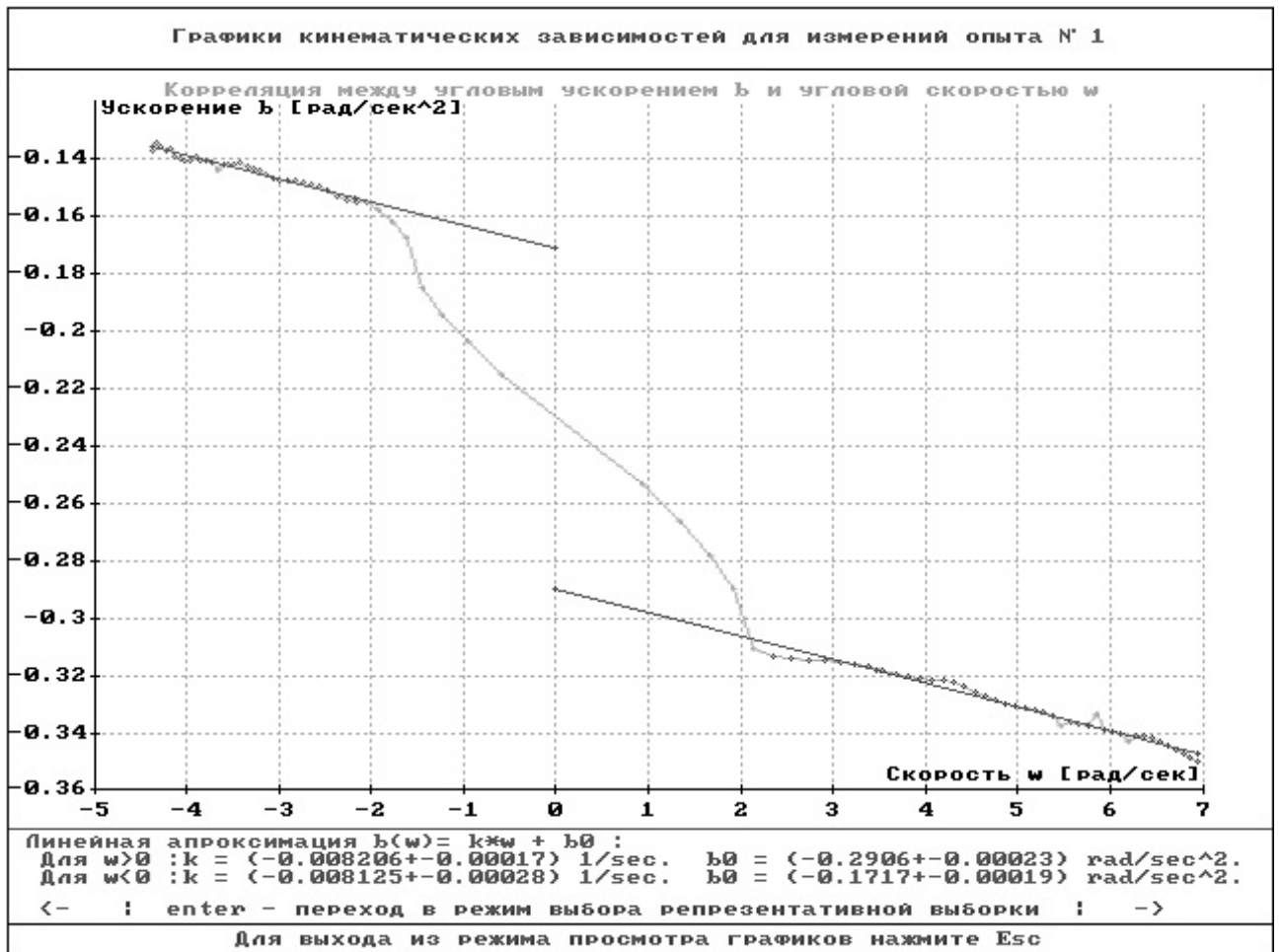


Рис. 3 График зависимости ускорения от скорости.

Если было проведено более одного опыта то можно быстро переключаться между графическими представлениями кинематических зависимостей нажимая клавиши со стрелками 'вправо' и 'влево'. При этом изменяется номер текущего опыта, указываемый в верхней части экрана. Также из этого режима осуществляется переход в режим определения ускорения маятника в момент времени соответствующий нулевой угловой скорости. Для этого нажатием клавиши 'enter' производится переход в режим отображения графика углового ускорения от угловой скорости, при этом на график накладываются графики линейной аппроксимации зависимости ускорения от скорости. (Рис 3) Под графиками печатаются параметры линейной аппроксимации, один из которых (b_0) соответствует требуемому ускорению.

Нажатием клавиши 'enter' осуществляется переход в режим 'репрезентативной выборки', в котором можно выбрать экспериментальные точки которые нужно включать в процедуру аппроксимации. (рис. 4 и рис. 5) Это позволяет убирать из обработки экспериментальные точки вблизи изменения направления вращения маятника и вблизи резкой смены знака ускорения, когда грузик переходит от движения вниз к движению вверх. В нижней части экрана даны подсказки, как выбирать экспериментальную точку для удаления или добавления её в набор обрабатываемых точек, при этом в верхнем правом углу печатаются значения угловой скорости и ускорения текущих экспериментальных точек. Программа различает два набора точек - для области отрицательных и положительных значений угловой скорости вращения маятника. Обрабатываемые точки выделены жёлтым и зелёным цветом. Текущая экспериментальная точка, которую можно удалить или добавить обведена кружком. Выход из режима производится по нажатию клавиши 'Esc' или 'enter'.

6 - Вывод данных измерений текущего опыта - Выдача на экран параметров текущего опыта и необработанных данных измерений, произведённых с помощью датчика. Данные измерений представлены в виде 2-ух колонок: угол поворота маятника и соответствующее число тактов таймера.

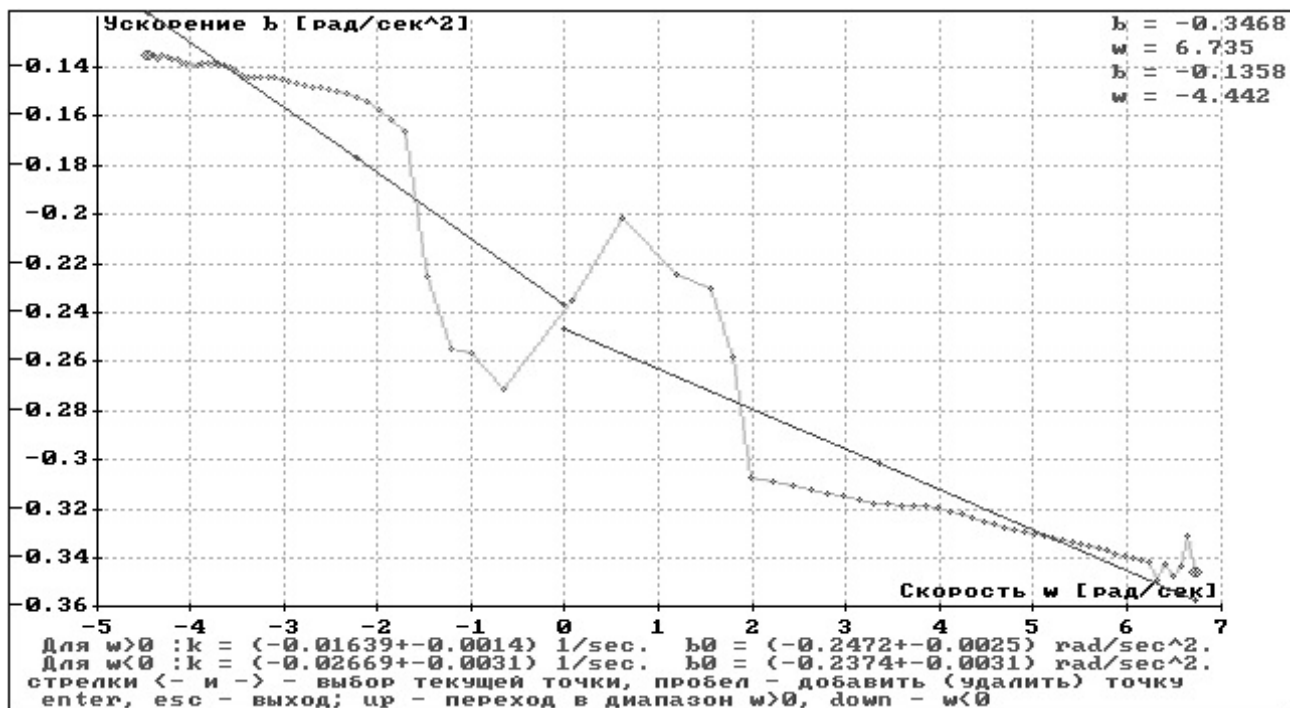


Рис. 4 График зависимости ускорения от скорости в режиме выбора точек для линейной аппроксимации. Вид до проведения выборки.

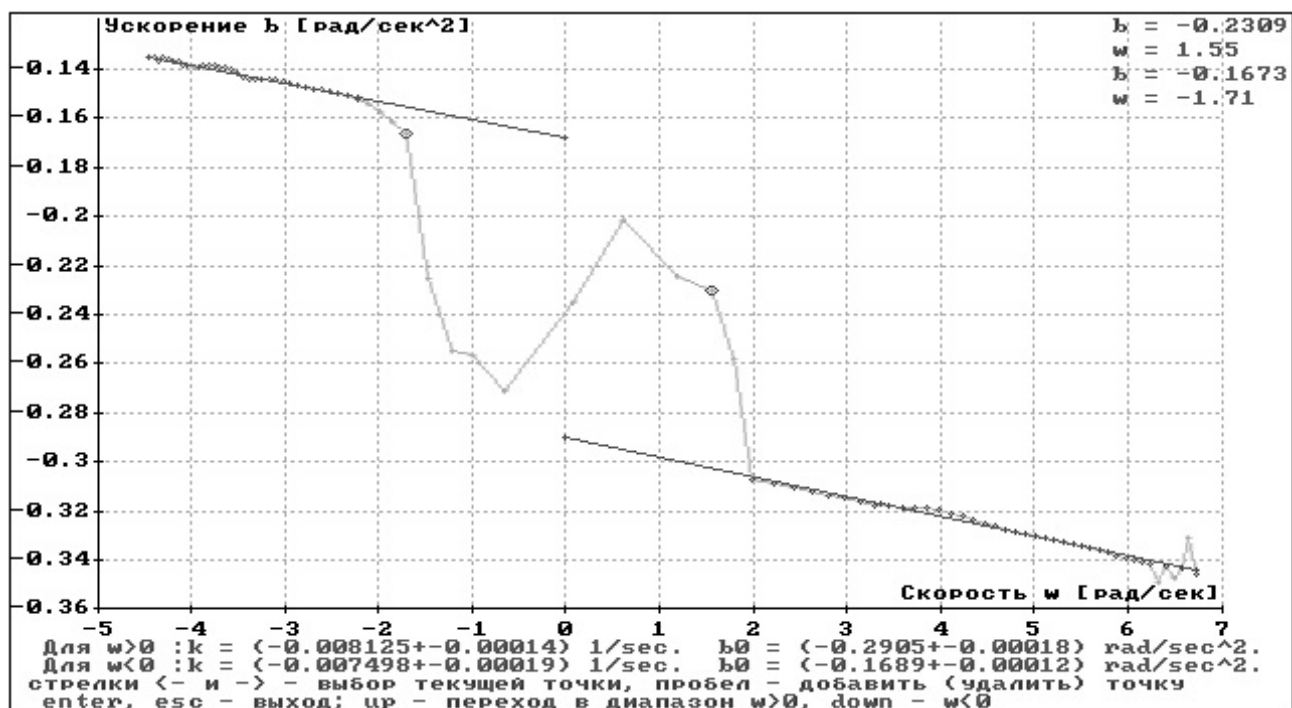


Рис. 5 График зависимости ускорения от скорости в режиме выбора точек для линейной аппроксимации. Вид после проведения выборки значимых экспериментальных точек.

7 - Выбор номера текущего опыта - Позволяет изменить номер текущего опыта. Данная опция может применяться, например, для возврата к ранее проведённому опыту с целью просмотреть результаты этого опыта или повторного измерения.

8 - Показать количество проведённых опытов и номер текущего опыта – Выдача количества проведённых опытов, заявленных опытов (все проведённые + 1 новый опыт, параметры которого заданы, но измерения ещё не проводились) и номер текущего опыта.

9 - Записать данные текущего опыта в файл - После проведения очередного измерения программа автоматически сохраняет необработанные данные в текстовый файл с данными в виде идентичном выводу данных на экран в пункте 6. Тем не менее, можно осуществить запись в файл вручную, например, если необходимо записать файл на 'флэшку' Для этого при включении компьютера в USB разъём должна быть вставлена 'флэшка', чтобы система DOS смогла её распознать. В данном пункте программа предлагает задать имя файла, которое нужно указать, например, в виде: D:\filename.txt , где filename - имя файла, в который будут записаны данные. При этом файл filename.txt будет располагаться в корневом каталоге 'флэшки'.

R - Считывание данных ранее записанных в файл - В этом режиме на экран выводится список *.txt файлов записанных за время проведения текущего занятия. Для загрузки нужно ввести имя нужного файла. Эта возможность позволяет восстановить данные проведённых измерений, если компьютер 'завис' в ходе работы, а также полезна для записи данных ранее проведённых опытов на 'флэшку'.

3. Методы проведения измерений

Основная цель проводимых кинематических измерений - определить угловое ускорение вращения маятника соответствующее нулевой угловой скорости. Требование нулевой угловой скорости связано с минимизированием влияния вязкого трения на определяемое ускорение, поскольку в работе используется приближение, в котором пренебрежено влиянием вязкого трения. Вязкое трение приводит к изменению ускорения при изменении скорости вращения маятника. При этом, как показывает опыт (рис. 3) вид корреляции между измеряемым угловым ускорением и угловой скоростью близок к виду линейной зависимости. В программе производится линейная аппроксимация зависимости ускорения от скорости, которая соответствует модели вязкого трения с линейной зависимостью силы трения от скорости. С помощью этой аппроксимации производится вычисление значения углового ускорения соответствующего нулевой угловой скорости. При этом можно обнаружить, что при изменении знака угловой скорости метод аппроксимации даёт немного различные значения углового ускорения соответствующие нулевой угловой скорости вращения маятника. Это различие можно объяснить влиянием сухого трения. Полезно сравнить эту разницу в ускорении с моментом трения определяемым методом подбора перегрузка приводящего маятник в движение.

Указанные соображения приводят к следующим сценариям проведения опыта. Перейдя из основного меню в режим измерений (нажав клавишу '4') убедитесь, что программа готова приступить к измерениям.

1. Спуск грузика.

Поднимите платформу с грузиком, намотав на шкив почти всю верёвку. Удерживая маятник, дождитесь, пока качания платформы завершатся, и платформа будет неподвижно висеть. Отпустите маятник и сразу же после этого нажмите клавишу 'пробел' для запуска измерений. Процесс измерений окончится при совершении

маятником числа полных оборотов указанного ранее, при инициализации опыта, (~15 для маленького шкива и ~10 для большого).

2. Подъём и спуск грузика.

Как и в первом случае, поднимите платформу с грузиком, намотав всю верёвку на шкив. Затем отпустите маятник, платформа начнёт опускаться. Дождитесь, пока размотается вся верёвка, после чего верёвка начнёт наматываться на шкив, а платформа подниматься. Во время перехода от разматывания верёвки к наматыванию с помощью линейки можно аккуратно перебросить верёвку на большой или малый шкив. Сразу после того как платформа начнёт подниматься нажмите клавишу 'пробел' для запуска процесса измерений. Платформа с грузиком сначала будет подниматься почти до той же высоты, с которой она была опущена. После этого опять начнётся спуск. В конце спуска процесс измерений должен прекратиться, для чего нужно подобрать соответствующее число полных оборотов маятника при инициализации опыта. (~20 для маленького шкива и ~15 для большого шкива)

При движении грузика вверх следите, чтобы нить наматывалась на шкив аккуратно, виток к витку в один ряд. Переход намотки на второй ряд приводит к возмущениям ускорения, которые заметно фиксируются на графиках. Избегайте намотки в навал. Рекомендуется провести ряд 'пристрелочных' опытов, для того чтобы лучше понять, как работает установка, и какие факторы могут оказывать влияние на угловое ускорение вращения маятника.

Первый метод более простой и позволяет избежать паразитных раскачиваний грузика, которые появляются во втором методе, когда верёвка перебрасывается в одной стороны шкива на другой. Однако, второй метод кажется предпочтительней, так как здесь можно сразу зафиксировать ускорение при различных знаках угловой скорости маятника.

Для целей балансировки программа предоставляет специальный режим, в котором показываются графики развёртки скорости и ускорения (в условных единицах) по числу отсчётов. Один отсчёт соответствует одному пересечению лазерного луча спицей маятника. Скорость и ускорение измеряются по времени пересечения спицей маятника луча лазера. Спицы маятника имеют одинаковую толщину, скорость и ускорение определяются для каждой спицы. Немонотонность кривых развёртки скорости и ускорения на протяжении соседних 4 отсчётов свидетельствуют о плохой балансировке маятника. Изменяя положения грузов на спицах маятника можно добиться сбалансированности маятника, которая в этом режиме хорошо проверяется. Проведя балансировку можно приступать к измерениям.

В процессе измерений фиксируется только последовательность моментов времени пересечения луча спицами маятника. При последующей обработке эти данные используются для построения графиков зависимостей от времени угла поворота, угловой скорости и углового ускорения. (Смотрите описание обработки данных измерений.)

4. Описание оптоэлектронного датчика

Оптоэлектронный датчик представляет собой пару лазер-приёмник, которые с помощью электронной схемы подключены к параллельному порту компьютера. В системе применён маломощный полупроводниковый лазер видимого диапазона (длина волны ~660 нм) луч которого падает на фотодиод (ФД256). При вращении маятника его спицы могут перекрывать луч. Фотодиод подключен к электронной схеме, на выходе которой могут формироваться два состояния: высокое напряжение (5 V) и низкое напряжение (0 V). Высокий уровень 5 V соответствует перекрытому лучу лазера, низкий 0 V - открытому

лучу, который падает на фотодиод. Выход схемы фотодиода подключен к параллельному порту компьютера, на 10 пин. Таким образом, считывая состояние параллельного порта можно следить за уровнем освещённости фотодиода, которая зависит, в конечном итоге, от положения спиц маятника. Программа при считывании состояния параллельного порта фиксирует моменты времени, когда состояние порта меняется. Изменение состояния порта соответствует блокированию или открытию луча.

Для фиксирования времени применён встроенный в компьютеры x86 архитектуры системный таймер. Этот таймер позволяет вести отсчёты времени с разрешением около 850 нс. Время обработки компьютером запроса к таймеру может занимать около 5-10 микросекунд в зависимости от тактовой частоты шины. Время запроса для данного компьютера не меняется от запроса к запросу, поэтому это время фактически означает задержку в обработке сигнала. Время запроса накладывает ограничения на максимальную частоту смены состояния параллельного порта. 10 микросекундам соответствует частота 100 кГц, что многократно превышает разумные допущения для возможной угловой скорости вращения маятника в лабораторной установке.

Помимо слежения за уровнем освещённости фотодиода система оптоэлектронного датчика также позволяет включать и выключать лазер. Это оказывается полезным для целей сбережения ресурса полупроводникового лазера и даёт управляющей программе дополнительные возможности для контроля состояния оптического тракта.

Для идентификации уровней открытого и закрытого лучей, перед началом очередных измерений программа проводит тест оптического тракта, с целью выявить состояние открытого луча. Для этого лазер включается и выключается каждые 5 миллисекунд. Синхронно с этими переключениями считывается состояние параллельного порта. При обнаружении синхронных совпадений переключений параллельного порта и выключения и включения лазера, считается, что оптический тракт открыт. Далее запоминаются состояния параллельного порта при включённом и выключенном лазере, которые используются при проведении измерений и позволяют идентифицировать открытие или блокирование луча спицами маятника.

5. Обработка кинематических измерений

На основе данных измерений программа вычисляет основные кинематические зависимости опыта: зависимость угла поворота маятника от времени, зависимость угловой скорости маятника от времени и зависимость угловой скорости от времени. Изначально данные измерений представляют собой набор целых чисел $\{t_i\}$, каждое из которых означает момент времени, когда спица маятника пересекла луч. Обработка результатов измерений выполняется поэтапно. Сначала определяются те моменты времени, когда маятник имел другое направление вращения по сравнению с предыдущим моментом. Далее выбирается каждое четвёртое значение момента времени с учётом возможной смены направления вращения маятника. Выбранные таким образом значения относятся только к одной спице. Это та спица, которая последняя до смены направления вращения и первая после пересекает луч лазера. Данные, отнесённые к одной спице, подвергаются дальнейшей обработке, при этом каждому моменту времени приписывается угол поворота маятника A_i кратный 2π . Угол поворота, начиная с нуля, увеличивается на 2π для каждого последующего момента времени. Если последующий момент времени ранее был обозначен как момент смены направления вращения, то угол остаётся прежним, а для всех следующих за ним моментов времени угол поворота уменьшается на 2π . Такая смена прибавления или отнимания величины 2π проводится для каждой смены направления вращения маятника.

Таким образом, после предварительной обработки получается заданная в виде таблицы зависимость угла поворота от времени $[\{A_i\}, \{t_i\}]$. Дальнейшая обработка базируется на интерполяции этой таблично заданной зависимости. Интерполяция полиномами низких степеней имеет наиболее простую и наглядную физическую интерпретацию. Так, например, интерполяция с использованием линейной функции соответствует приближению, при котором движение между двумя зафиксированными моментами времени происходит с постоянной скоростью равной средней скорости. Интерполяция квадратичной функцией аналогично, соответствует движению с постоянным ускорением, но для интерполяции полиномом 2 степени требуется уже не 2, а 3 точки табличных данных. Чем выше степень интерполяционного полинома, тем больше требуется точек из таблицы и тем большее число высших производных учитывается в разложении. Однако сильно повышать степень интерполяционных полиномов нельзя, поскольку задача численного определения коэффициентов такого полинома становится численно неустойчива и плохо обусловлена уже при степени полинома равной 10.

Интерполяционный полином, который определён на некотором интервале и проходит через заданные точки $\{t_i\}$ функции можно сравнить с полиномом в разложении Тейлора. Действительно, в разложении Тейлора фигурируют точные значения производных функции в точке разложения.

$$T(t) = Y(t_0) + Y'(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} Y''(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} Y'''(t_0) \cdot (t - t_0)^3 + \dots \quad (1)$$

А при интерполяции коэффициенты интерполяционного многочлена можно связать со средними значениями соответствующих производных, вычисленными на интервале интерполяции. Например, для интерполяции полиномом 3-ей степени:

$$P(t) = Y(t_0) + v \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} b \cdot (t - t_0)^3 \quad (2)$$

При этом, в отличие от разложения Тейлора, значения интерполяционного полинома совпадают со значением функции не только в точке t_0 но и ещё в нескольких точках – в зависимости от степени полинома. Чем выше степень интерполяционного полинома, тем ближе значения коэффициентов 'v' и 'a' к точным значениям производной в точке t_0 .

В программе вычисляются 3 варианта интерполяции: квадратичная, кубическая и интерполяция полиномом 4-ой степени. Для каждого варианта интерполяции были выбраны точечные шаблоны, которые конкретизируют, для какой точки записывается разложение в степенной ряд, и через какие точки должна проходить кривая интерполяции. На графиках кинематических зависимостей (рис 2) показываются ускорения определённые с помощью интерполяции полиномами 2-ой, 3-ей и 4-ой степеней. Видны области «регулярного» движения – там, где ускорения, определяемые всеми тремя способами, дают практически одинаковые значения, и области (как правило, вблизи разворота маятника) где методы дают различные значения ускорения. В области «регулярного» движения ускорение определяется корректно.

Формула Тейлора:

$$T(t) = Y(t_0) + Y'(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} Y''(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} Y'''(t_0) \cdot (t - t_0)^3 + \dots \quad (2)$$

здесь t_0 - точка, в которой записывается разложение Тейлора знак ` означает производную функции, знаки `` и ``` - соответственно вторую и третью производные. Если $Y(t)$ - зависимость координаты от времени, то $Y'(t_0)$ - скорость в момент t_0 , а $Y''(t_0)$ - ускорение.

Квадратичная интерполяция, точечный шаблон (-1,0,+1):

$$P(t) = A_i + v \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2, \text{ где } v \text{ и } a - \text{ скорость и ускорение.}$$

$P(t_{i+1}) = A_{i+1}$ - требование совпадения в следующей точке

$P(t_{i-1}) = A_{i-1}$ - требование совпадения в предыдущей точке.

Запись "точечный шаблон (-1,0,+1)" означает, что разложение записано для каждой точки с номером i и кривая полинома проходит через точки таблицы с номерами $i-1$, i , $i+1$. Скорость v относится к моменту времени t_i . Ускорение 'a' считается постоянным на всём промежутке времени от t_{i-1} до t_{i+1} . Изменение скорости на этом промежутке:

$$v(t) = v + a \cdot (t - t_i). \quad (2.a)$$

Кубическая интерполяция, точечный шаблон (-1,0,+1,+2):

$$P(t) = A_i + v \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} b \cdot (t - t_0)^3 \quad (3)$$

где v и a - скорость и ускорение

Требования совпадений:

$$P(t_{i-1}) = A_{i-1}, P(t_{i+1}) = A_{i+1}, P(t_{i+2}) = A_{i+2}$$

Рабочий интервал : от t_{i-1} до t_{i+2} ;

$$\text{Изменение скорости на интервале: } v(t) = v + a \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot (t - t_i)^2 \quad (3.a)$$

$$\text{Изменение ускорения на интервале: } a(t) = a + b \cdot (t - t_i). \quad (3.b)$$

Интерполяция 4-ой степени, точечный шаблон (-2,-1,0,+1,+2):

$$P(t) = A_i + v \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 + \frac{1}{6} b \cdot (t - t_0)^3 + \frac{1}{24} g \cdot (t - t_0)^4 \quad (4)$$

где v и a - скорость и ускорение.

Требования совпадений:

$$P(t_{i-2}) = A_{i-2}, P(t_{i-1}) = A_{i-1}, P(t_{i+1}) = A_{i+1}, P(t_{i+2}) = A_{i+2}$$

Рабочий интервал : от t_{i-2} до t_{i+2} ;

Изменение скорости на интервале:

$$v(t) = v + a \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot (t - t_i)^2 + \frac{1}{6} \cdot g \cdot (t - t_i)^3 \quad (4.a)$$

Изменение ускорения на интервале:

$$a(t) = a + b \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_i)^2 \quad (4.b)$$

Таким образом, для всех точек таблицы вычислялись значения скорости и ускорения. Исключения составляли лишь по одной или двум точкам на краях, для которых невозможно применить указанные точечные шаблоны.

Ещё одна особенность обработки связана с тем, что регистрация угла поворота маятника производится кратно 2π , а это означает, что определяемые скорости и ускорения описанным выше методом будут соответствовать усредненным за один оборот маятника скоростям и ускорениям. В приложении показано, что усреднённое за один оборот угловое ускорение при нулевой средней угловой скорости будет определяться только моментом внешних сил.

Дальнейшая обработка связана с линейной аппроксимацией зависимости ускорения от скорости и определению с помощью этой аппроксимации значения углового ускорения соответствующего нулевой угловой скорости. Аппроксимация производится методом наименьших квадратов отдельно для областей отрицательных и положительных значений угловой скорости вращения маятника.

6. Краткая инструкция использования программы

1. Включить компьютер.
2. Дождаться пока появится заставка.
3. Нажать клавишу 'пробел' - появится текст описания программы.
4. Нажать клавишу Esc для выхода в 'основное меню' (Рис 1)
5. Нажать клавишу '1' – инициализация нового опыта.
6. Ввести данные, которые запросит программа. По окончании ввода программа вернётся в 'основное меню'. (Число отсчётов ввести равное 20.)
7. Подготовить установку к проведению измерений в соответствии с первым или вторым способом измерений (см. раздел 3.)
8. Нажать клавишу '4'.
9. Привести маятник в движение.
 - a. При первом способе измерений сразу после начала движения маятника нажать клавишу 'пробел'. Система начнёт проводить измерения.
 - b. Во втором способе измерений дождаться, когда платформа с грузиком начнёт подниматься, после чего нажать клавишу 'пробел'. Система начнёт проводить измерения.
10. Дождаться пока система не закончит процесс измерений, и программа не перейдёт в 'основное меню'.
11. Нажать клавишу '5'. На экране появятся кинематические зависимости проведённого опыта. (Рис 2)
12. Нажать клавишу 'enter' два раза. Программа перейдёт в режим выбора экспериментальных точек для линейной аппроксимации. (Рис 4)
13. Используя клавиши со стрелками 'влево', 'вправо', 'вверх' и 'вниз', а также клавишу 'пробел', выбрать точки для проведения аппроксимации. (Рис 5)
14. Переписать параметры линейной аппроксимации для проведённого опыта в тетрадь. (Показаны в нижней части экрана на рис.4 и рис. 5) Один из параметров (b_0) – требуемое ускорение, которое соответствует нулевой скорости вращения маятника.
15. Нажать клавишу 'Esc' для выхода в 'основное меню'.
16. Для проведения нового измерения начать с пункта '5'.
17. По завершению проведения измерений выключить компьютер.

7. Приложение

Уравнение, описывающее движение маятника:

$$I\ddot{\varphi} = -mga \cdot \sin(\varphi) - b \cdot \dot{\varphi} + M \quad (5)$$

где, I – момент инерции маятника, m – его масса, g – ускорение свободного падения, a – расстояние от центра масс маятника до оси вращения, b – коэффициент вязкого трения, M – момент внешних сил, который считается постоянным во время движения. Здесь учтены факторы разбалансировки маятника и вязкого трения.

Усредним уравнение (5) по времени одного оборота:

$$\frac{I}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \ddot{\varphi}(t) dt = -\frac{mga}{T} \cdot \int_{t-T/2}^{t+T/2} \sin(\varphi(t)) dt - \frac{b}{T} \cdot \int_{t-T/2}^{t+T/2} \dot{\varphi} dt + \frac{M}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt \quad (6)$$

где временной интервал T соответствует одному обороту маятника. После интегрирования получим:

$$\begin{aligned} \frac{I}{T} \cdot (\dot{\varphi}(t+T/2) - \dot{\varphi}(t-T/2)) &= -\frac{mga}{T} \cdot \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \frac{\sin(\varphi)}{\dot{\varphi}} d\varphi - \frac{b}{T} \cdot 2\pi + M \Rightarrow \\ I \langle \ddot{\varphi} \rangle &= -\frac{mga}{2\pi} \cdot \langle \dot{\varphi} \rangle \cdot \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \frac{\sin(\varphi)}{\dot{\varphi}} d\varphi - b \cdot \langle \dot{\varphi} \rangle + M \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим интеграл в выражении (7), для этого воспользуемся тем, что факторы разбалансировки и вязкого трения много меньше, чем момент внешних сил. Тогда в нулевом приближении можно считать, что движение маятника равноускоренно:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{M}{I} \\ \dot{\varphi} &= \frac{M}{I} t \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2M}{I}} \varphi \\ \varphi &= \frac{Mt^2}{2I} \end{aligned} \quad (8)$$

Константы интегрирования в (8) выбраны так, чтобы в момент остановки маятника, угол поворота был равен нулю. Тогда интеграл из выражения (7) можно оценить так:

$$\int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \frac{\sin(\varphi)}{\dot{\varphi}} d\varphi \approx \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{\frac{2M}{I}} \varphi} d\varphi = \sqrt{\frac{I}{2M}} \cdot \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{\varphi}} d\varphi = \sqrt{\frac{I}{2M}} \cdot \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} 2 \sin(\sqrt{\varphi}^2) d\sqrt{\varphi} = \quad (9)$$

$$\sqrt{\frac{I}{2M}} \sqrt{2\pi} \cdot \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2\varphi}{\pi}}\right) d\sqrt{\frac{2\varphi}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi I}{M}} \cdot \left(S\left(\sqrt{\frac{2\varphi}{\pi}} + 2\right) - S\left(\sqrt{\frac{2\varphi}{\pi}} - 2\right) \right)$$

Здесь $S(x)$ – функция известная как Интеграл Френеля, и её свойства хорошо изучены. При вычислении интеграла в (9) значение угла $|\varphi| > \pi$ так, чтобы можно было говорить о полном обороте маятника. В области $|\varphi| < \pi$ происходит остановка маятника и смена направления его движения. На этом интервале углов определение среднего ускорения описанным выше методом (6-7) некорректно, поскольку маятник не совершает полный оборот. Для значений $\varphi > \pi$ выражение в скобках в (9) ограничено значением ~ 0.3434 , причём быстро стремится к нулю при увеличении угла φ (см. рис 6) Как видно на рисунке 6, после 2-3 полных оборотов, вкладом выражения (9) практически можно пренебречь.

Тогда уравнение (7) можно переписать в виде:

$$\langle \ddot{\varphi} \rangle = -\frac{b}{I} \cdot \langle \dot{\varphi} \rangle + \frac{M}{I} \quad (10)$$

Ускорение соответствующее нулевой средней угловой скорости, определяется только моментом внешних сил. Проводя линейную аппроксимацию измеренной в эксперименте

зависимости углового ускорения от угловой скорости можно определить величину ускорения, которое определяется только моментом внешних сил. При этом необходимо учитывать только такие значения ускорения, которые более чем на один полный оборот «отстоят» от момента остановки маятника. Определённое таким образом угловое ускорение является той величиной, которая требуется для дальнейшей обработки в лабораторной работе с маятником Обербека.

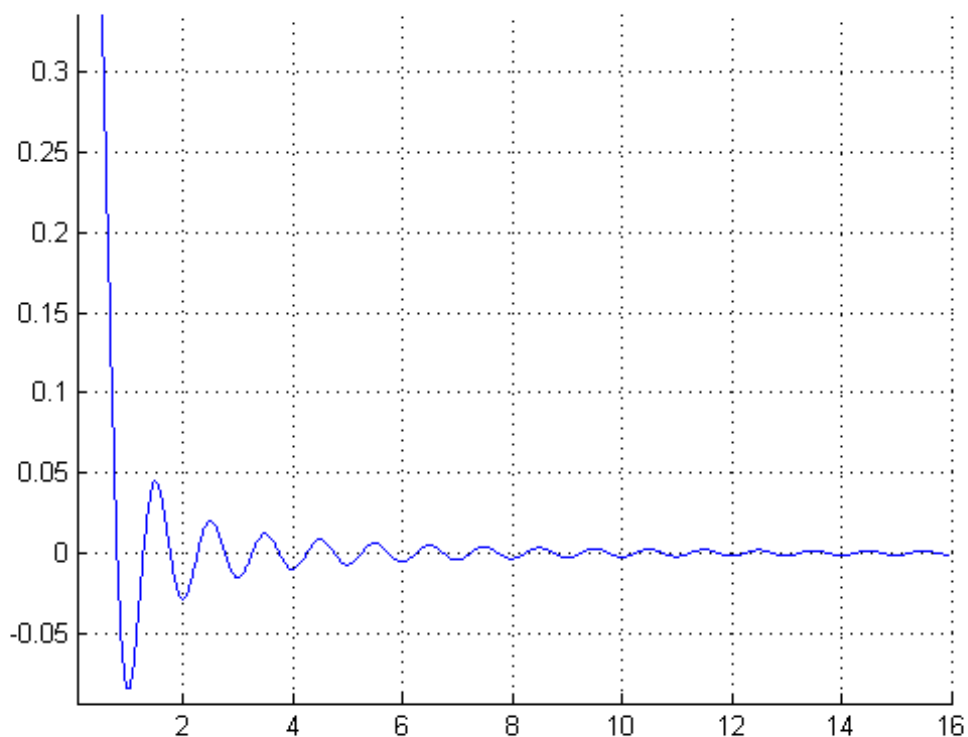


Рис 6 График функции $S(\sqrt{4n+2}) - S(\sqrt{4n-2})$, где n – индекс полного оборота. ($\varphi = 2\pi n$)