



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОКУСНЫХ РАССТОЯНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЛИНЗ

Лабораторная работа №1.1.7*
по курсу Общая физика

Цель: Измерить фокусные расстояния собирающей и рассеивающей линз различными методами. Определить погрешности измерений в каждом методе.

Приборы и принадлежности: оптическая скамья с набором рейтеров, положительная и отрицательная линзы, осветитель, экран, зрительная труба.

Реальная оптическая система содержит несколько преломляющих сферических поверхностей. Оптическую систему называют *центрированной*, если центры всех поверхностей лежат на одной прямой, которую называют главной *оптической осью* системы. Она является осью симметрии системы.

Оптические системы, содержащие две преломляющие поверхности называют линзами. Световые лучи называются *гомоцентрическими*, если они или их продолжение исходят из одной точки. Идеальной оптической системой называют систему, в которой сохраняется гомоцентричность пучков.

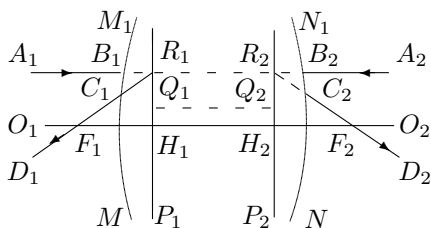


Рис. 1. Ход лучей в толстой линзе

Пусть MM_1 и NN_1 — крайние поверхности, ограничивающие оптическую систему (линзу), а O_1O_2 — главная оптическая ось (рис. 1). Проведём луч A_1B_1 параллельный главной оптической оси. Этому лучу соответствует луч C_2D_2 , выходящий из системы. Ход луча внутри оптической системы нас интересовать не будет. Точка F_2 пересечения луча C_2D_2 с главной оптической осью является изображением бесконечно удалённой точки (это легко показать с помощью второго луча, распространяющегося вдоль главной оптической оси). Точку F_2 называют задним фокусом системы (фокусом в пространстве изображений). Плоскость, перпендикулярная O_1O_2 и проходящая через точку F_2 , называется задней фокальной плоскостью. Задний фокус линзы не всегда, конечно, лежит справа от неё, как показано на рис. 1. Для рассеивающих линз задний фокус может лежать слева от всех оптических поверхностей, входящих в состав системы.

Рассмотрим теперь луч A_2B_2 , входящий в систему справа и лежащий на продолжении луча A_1B_1 . Слева из системы выйдет луч C_1D_1 , сопряжённый лучу A_2B_2 . Точку F_1 называют *передним фокусом системы* (фокусом в пространстве предметов). Исходящие из него лучи в пространстве изображений параллельны оптической оси. Продолжим лучи C_1D_1 и C_2D_2 до пересечения с продолжениями A_1B_1 и A_2B_2 и отметим точки пересечения R_1 и R_2 . Легко видеть, что эти точки сопряжены, т. е. являются изображением друг друга. Действительно, точка R_1 лежит на пересечении лучей A_1B_1 и C_1D_1 , а точка R_2 — на пересечении сопряжённых им лучей A_2B_2 и C_2D_2 (для большей наглядности направление одной пары сопряжённых лучей, например, A_2B_2 и C_1D_1 , можно изменить на противоположное, пользуясь обратимостью световых лучей). Из построения ясно, что точки R_1 и R_2 лежат на одинаковом расстоянии от главной оптической оси, т. е. $R_1H_1 = R_2H_2$ (поперечное увеличение равно +1).

Можно показать, что в идеальной оптической системе все точки плоскости P_1 , перпендикулярной оптической оси и проходящей через R_1 , попарно сопряжены точкам плоскости P_2 , также перпендикулярной главной оптической оси и проходящей через R_2 . При этом сопряжённые точки находятся на одинаковых расстояниях от оси (например точки Q_1 и Q_2). Плоскости P_1 и P_2 называются *главными плоскостями*, а точки H_1 и H_2 — *главными точками системы*. Расстояния от главных точек до фокусов называются *фокусными расстояниями*:

$$f_1 = H_1F_1, \quad f_2 = H_2F_2.$$

В том случае, когда с обеих сторон системы находится одна и та же среда (например, воздух), $f_1 = f_2 = f$.

Если известно положение фокусов и главных плоскостей, изображение предмета может быть найдено путём простых геометрических построений. Рис. 2 иллюстрирует эти построения. При этом удобно рассматривать лучи: а) падающие на линзу параллельно главной оптической оси; б) проходящие через передний фокус линзы; в) проходящие через главные точки системы. Между главными плоскостями все лучи следует строить параллельно главной оптической оси. Для построения изображения точки необходимо рассмотреть ход двух любых лучей. Третий луч используют для проверки правильности построения изображения.

Оптическая система называется *положительной* или собирающей, если лучи, падающие на неё параллельно главной оптической оси, пройдя систему, отклоняются в направлении оси — собираются. Передний фокус F_1 в этом случае летит слева от главной плоскости P_1 ,

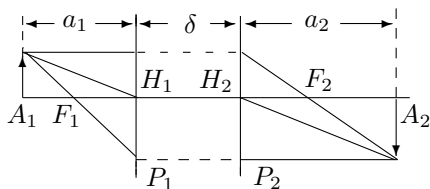


Рис. 2. Построение изображения в толстой линзе

а задний фокус F_2 — справа от P_2 . Если же лучи, пройдя систему, отклоняются от оси, — система называется *отрицательной*, или рассеивающей. При этом с оптической осью пересекаются не сами лучи, а их продолжения; F_1 располагается правее P_1 , а F_2 — левее P_2 .

Фокусному расстоянию приписывается определённый знак: плюс для положительной системы и минус — для отрицательной. Если ввести расстояния от предмета и изображения до соответствующих главных плоскостей, то легко установить соотношение между этими расстояниями и фокусным расстоянием системы:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

В формуле (1) a_1 считается положительным, если предмет лежит слева от передней главной плоскости, a_2 положительно, если изображение лежит справа от задней главной плоскости, а фокусное расстояние берётся со своим знаком.¹

Следует отметить, что главные плоскости могут лежать как внутри, так и вне системы и при этом располагаться асимметрично относительно поверхностей, ограничивающих оптическую систему.

Большой практический интерес представляет случай, когда размер оптической системы в направлении главной оптической оси значительно меньше фокусного расстояния. Оптический луч, проходя внутри такой системы, мало смещается, поэтому главные плоскости P_1 и P_2 (рис. 1, рис. 2) практически совпадают и располагаются где-то посередине системы. Такая оптическая система называется тонкой линзой. Формула (1) остаётся, конечно, справедливой и для тонкой линзы; рас-

¹При употреблении терминов «передняя» и «задняя» главные плоскости следует иметь в виду, что нередко передняя плоскость лежит позади, а не впереди задней (также, как передний и задний фокусы). В этом смысле более точны термины «главная плоскость в пространстве предметов», и главная плоскость в пространстве изображений.

стояния a_1 и a_2 и фокусное расстояние f можно в этом случае приближенно отсчитывать от центра линзы.

Формула (1) называется формулой линзы в отрезках. Она ставит в соответствие каждой точке пространства предметов точку в пространстве изображений. При этом ось системы координат пространства предметов направлена влево, а ось системы координат пространства изображений направлена вправо. За нулевые точки в обеих системах принимаются главные точки. Если же за нулевую точку системы координат в пространстве предметов выбрать передний фокус, а за нулевую точку системы координат в пространстве изображений — задний фокус, из формулы (1) получим формулу Ньютона

$$X_1 \cdot x_2 = f^2. \quad (2)$$

Здесь x_1 и x_2 координаты предмета и его изображения в новых системах координат.

В настоящей работе измеряются фокусные расстояния тонкой положительной и тонкой отрицательной линз.

ЗАДАНИЕ

I. Центрирование элементов оптической системы

В работе измерения выполняются на оптической скамье, вдоль которой перемещаются рейтеры с линзами, экранами и т. п. Для смещения линз в поперечном направлении используются поперечные салазки.

Расстояния между элементами оптической системы измеряют металлической линейкой. На оправках линз имеются проточки, указывающие расположение центров линз.

Для перемещения рейтера с оптическим элементом вдоль скамьи винт, крепящий его к скамье, следует лишь слегка ослабить, чтобы не допускать перпендикулярного скамье смещения. Перемещая рейтер вдоль скамьи, прижимайте его к скамье со стороны, противоположной винту.

Задание:

1. Перед началом измерений центры линз и их оптические оси необходимо выставить на одну линию (оптическая ось установки), параллельную ребру оптической скамьи. На конце оптической скамьи установите осветитель с предметной сеткой, ограничиваемой в размерах ирисовой диафрагмой. Затем поставьте на скамью рейтер с

экраном, придвигая его вплотную к осветителю и совмещают центр экрана с центром яркого пятна, создаваемого на нём осветителем. Эта операция должна быть выполнена при плотно завёрнутом винте, крепящим рейтер экрана на оптической скамье.

Чтобы избежать в дальнейшем путаницы с ориентацией рейтеров (при повторной их установке на скамье), следует придерживаться простого правила: винты, крепящие рейтеры на скамье должны быть всегда расположены со стороны, на которой находится экспериментатор.

2. Отодвиньте экран от осветителя на расстояние около 1 м и закрепите на скамье винтом. Между ними расположите рейтер с положительной линзой. Передвигая линзу вдоль скамьи, добейтесь чёткого изображения предмета на экране.
3. Закрепите рейтер с линзой на оптической скамье, и, смещая линзу по высоте и в поперечном направлении, приведите центр изображения к центру экрана.
4. Для центровки отрицательной линзы необходимо воспользоваться уже отцентрированной положительной линзой, расположив её впереди отрицательной. Перемещая сдвинутые до прикосновения рейтеры с линзами вдоль оптической скамьи, добейтесь чёткого изображения предмета на экране и закрепите обе линзы на скамье. Затем, смещая отрицательную линзу по высоте и в поперечном направлении, совместите центр изображения с центром экрана.

II. Определение фокусного расстояния тонкой положительной линзы

Фокусное расстояние тонкой положительной линзы можно определять различными способами.

Способ 1. Фокусное расстояние тонкой положительной линзы можно определить исходя из формулы линзы. Для этого достаточно измерить расстояния a_1 и a_2 и затем вычислить f по формуле (1).

Найдём, чем определяется ошибка измерения фокусного расстояния в данном методе.

Ошибка нахождения a_1 и a_2 определяется ошибкой измерения (с помощью линейки) этих расстояний и ошибкой фокусировки. В рамках нашей установки ошибки $\Delta a_{\text{и}}$ измерения расстояний a_1 и a_2 незначительны (при измерениях линейкой они составляют ≈ 1 мм) по сравнению с ошибкой фокусировки $\Delta a_{\text{ф}}$. Поэтому полная ошибка $\Delta a =$

$\sqrt{(\Delta a_{\text{ф}})^2 + (\Delta a_{\text{и}})^2}$ нахождения расстояний a_1 и a_2 практически равна ошибке фокусировки: $\Delta a \approx \Delta a_{\text{ф}}$.

Заметим, что ошибки фокусировки для a_1 и a_2 не независимы: они равны по величине и противоположны по знаку:

$$\Delta a_1 = -\Delta a_2 = \Delta a.$$

Для нахождения ошибки определения фокусного расстояния, выразим фокусное расстояние через, например, a_1 :

$$f = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{L - a_1} \right)^{-1}$$

Ошибка измерения фокусного расстояния найдётся как

$$\Delta f = \left| \frac{df}{da_1} \right| \cdot \Delta a_1$$

После взятия производной и упрощения полученного выражения (выкладки проведите самостоятельно), получим

$$\Delta f = \frac{|a_2 - a_1|}{L} \Delta a. \quad (3)$$

Таким образом, точность определения фокусного расстояния по формуле линзы зависит от расстояния между предметом и изображением $L = a_1 + a_2$. Кроме того, видно, что ошибка будет минимальна, когда $a_1 \approx a_2$. В этом случае расстояние между предметом и изображением равно $L = a_1 + a_2 = 4f$. Практически, однако, эксперимент следует проводить при несколько большем расстоянии, когда существует два положения линзы a_1 и a'_1 , соответствующих сфокусированным изображениям (увеличенному и уменьшенному). Эти два положения можно различить, расстояния между соответствующими положениями линзы $|a'_1 - a_1| = |a_2 - a_1|$ будет больше, чем ошибка фокусировки: $|a_2 - a_1| \gtrsim \Delta a$. При этом ошибка определения фокусного расстояния будет небольшой.

Задание:

1. На одном конце оптической скамьи установите осветитель с предметной сеткой и ирисовой диафрагмой. На другом конце оптической скамьи установите экран. Между предметом и экраном поместите исследуемую линзу.

2. Перемещая линзу вдоль скамьи, получите чёткое изображение предмета на экране.

3. С помощью линейки измерьте расстояния a_1 и a_2 .

Для каждого расстояния между предметом и экраном $a_1 + a_2 > 4f$ существуют два положения линзы, одно соответствует увеличенному изображению, другое — уменьшенному.

4. Повторите измерения 6–8 раз при фиксированном расстоянии L , каждый раз делая фокусировку заново и измеряя расстояния a_1 и a_2 .

5. Рассчитайте значения фокусных расстояний f в каждом измерении и по найденным значениям найдите среднее значение фокусного расстояния \bar{f} , среднеквадратичное отклонение $\sigma_f = \sqrt{(f - \bar{f})^2}$, и стандартную ошибку среднего $\sigma_{\bar{f}}$. Оцените ошибку фокусировки Δa в вашем опыте.

Способ 2 (Бесселя). Пусть расстояние между предметом и экраном превышает $4f$. При этом всегда найдутся два таких положения линзы, при которых на экране получаются отчётливые изображения предмета (в одном случае увеличенное, в другом — уменьшенное). Из соображений симметрии ясно, что $a_1 = a_2'$ и $a_2 = a_1'$ (рис. 3). Обозначим расстояние между предметом и экраном через L , а расстояние между двумя положениями линзы через ℓ :

$$L = a_1 + a_2, \quad \ell = a_2 - a_2' = a_2 - a_1.$$

Тогда

$$a_1 = (L - \ell)/2, \quad a_2 = (L + \ell)/2. \quad (4)$$

Подставляя (4) в формулу линзы (1), найдём после несложных преобразований:

$$f = \frac{L^2 - \ell^2}{4L}. \quad (5)$$

Для определения фокусного расстояния достаточно, таким образом, измерить расстояние L между предметом и экраном и расстояние ℓ между двумя положениями линзы, при которых на экране получаются чёткие изображения.

Поскольку величины L и ℓ являются независимыми, ошибка определения фокусного расстояния f определяется выражением

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)^2 (\Delta L)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \ell}\right)^2 (\Delta \ell)^2}. \quad (6)$$

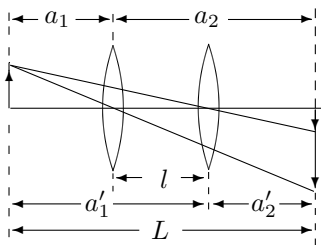


Рис. 3. Измерение фокусного расстояния по методу Бесселя

Здесь производная $\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{1}{4} + \frac{\ell^2}{4L^2}$ имеет минимум при $\ell = 0$, а производная $\left| \frac{\partial f}{\partial \ell} \right| = \frac{\ell}{2L}$ равна нулю в этой точке. Таким образом, ошибка определения фокусного расстояния по формуле (5) минимальная, если ℓ мало (по сравнению с L), и равна

$$\Delta f \approx \frac{1}{4} \Delta L.$$

Ошибка ΔL определяется погрешностью измерения металлической линейкой (≈ 1 мм). Ошибка $\Delta \ell$ практически определяется погрешностью фокусировки, поскольку она значительно больше погрешности измерения длины ℓ .

Задание: Измерения следует проводить с линзой, которая применялась в предыдущем опыте.

1. Подберите такую величину L , чтобы ℓ было мало сравнению с L , однако превышало ошибку фокусировки (т. е. чтобы увеличенное и уменьшенное изображения были различимы при соответствующих положениях линзы).
2. Произведите фокусировку увеличенного и уменьшенного изображений и найдите расстояние ℓ посредством измерения положений линзы относительно предмета (a_1) или экрана (a_1).
3. Измерения повторите 6–8 раз при одной длине L , всякий раз производя перефокусировку.
4. По полученным значениям L и ℓ вычислите значения фокусных расстояний f в каждом измерении по формуле (5). По найденным

значениям найдите среднее значение фокусного расстояния \bar{f} , среднеквадратичное отклонение $\sigma_f = \sqrt{(f - \bar{f})^2}$, и стандартную ошибку среднего $\sigma_{\bar{f}}$.

Способ 3. Фокусное расстояние тонкой положительной линзы можно определить с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность. Такую установку проще всего осуществить, наводя её на достаточно удалённый предмет (например, на окно в конце длинного коридора). Зрительную трубу не рекомендуется устанавливать на бесконечность, наводя её на предмет за оконным стеклом, так как оконные стёкла часто оказываются недостаточно плоскими. После этого устанавливают трубу на оптической скамье, а между ней и предметом (сетка осветителя) помещают исследуемую линзу. Передвигая линзу, следует установить её так, чтобы в окуляре трубы появилось отчётливое изображение сетки.

Поскольку труба настроена на бесконечность и, следовательно, сфокусирована на параллельный пучок лучей, отчётливое изображение появляется при совмещении фокальной плоскости линзы с предметом. Расстояние между предметом и линзой равно для тонкой линзы фокусному расстоянию.

Задание: Проведите опыт 6–8 раз, по результатам опытов найдите среднее значение фокусного расстояния \bar{f} и рассчитайте стандартную ошибку его определения $\sigma_{\bar{f}}$.

Сравните результаты измерений по 3-м приведённым методам.

III. Определение фокусного расстояния тонкой отрицательной линзы

Способ 1. Определение фокусного расстояния отрицательной линзы затрудняется тем, что изображение предмета мнимое (при действительном источнике) и поэтому не может быть непосредственно позиционировано. Эту трудность легко обойти с помощью вспомогательной положительной линзы.

В начале опыта на оптической скамье помещают только дополнительную линзу и получают на экране действительное изображение предмета. Затем на пути лучей, выходящих из положительной линзы, располагают исследуемую отрицательную линзу (рис. 4). На неё падает пучок сходящихся лучей. Точка S_1 пересечения лучей играет по отношению к отрицательной линзе роль мнимого источника.

Действительное изображение источника S_1 переместится теперь в S_2 . Измеряя расстояние от отрицательной линзы до экрана S_1 , нахо-

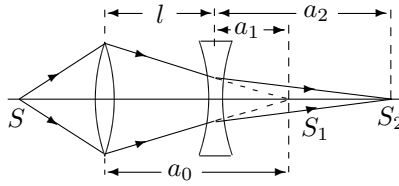


Рис. 4. Измерение фокусного расстояния отрицательной линзы

дят расстояние a_1 . Отодвинув экран в новое положение изображения S_2 , измеряют расстояние a_2 и с помощью формулы (1) вычисляют фокусное расстояние отрицательной линзы. При вычислении нужно присписать расстояниям a_1 и a_2 правильные знаки ($a_1 < 0, a_2 > 0$).

Поскольку в данном опыте величины a_1 и a_2 независимы, погрешность f определяется формулой

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)^2 (\Delta a_1)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)^2 (\Delta a_2)^2} \quad (7)$$

Здесь

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{a_2^2}{(a_1 + a_2)^2}, \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = \frac{a_1^2}{(a_1 + a_2)^2}. \quad (8)$$

Как следует из формулы (1), допустимые значения a_1 лежат в интервале от 0 до f . В соответствии с (8) производные, входящие в выражение для погрешности (7), минимальны при $a_1 = f$ (f — отрицательная величина). Для получения величины фокусного расстояния f с максимальной точностью, следует выбирать a_1 вблизи этого значения. Практически этот выбор ограничивается интервалом $a_1 = \frac{f}{2} \div f$.

Погрешности Δa_1 и Δa_2 определяются ошибками при фокусировке, поэтому при многократных повторах измерений a_1 и a_2 следует заново проводить фокусировки изображений S_1 и S_2 .

Опыт проводится 6–8 раз. По результатам опытов находится среднее значение фокусного расстояния \bar{f} и стандартная ошибка его определения $\sigma_{\bar{f}}$.

Способ 2. Если мнимый источник S_1 (рис. 7) совпадает с передним фокусом отрицательной линзы (напомним, что передний фокус отрицательной линзы расположен за линзой), то изображение предмета перемещается в бесконечность, т. е. лучи выходят из линзы параллельным пучком. Параллельность пучка можно установить с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность. Зная положение источ-

ника и линзы нетрудно определить фокусное расстояние, если линза является тонкой.

Опыт проводится 6–8 раз; по результатам опытов находится среднее значение фокусного расстояния \bar{f} и стандартная ошибка его определения $\sigma_{\bar{f}}$.

Контрольные вопросы

1. Рассматривая ход лучей через линзу (рис. 4), выведите формулу линзы (1), а затем получите из неё формулу Ньютона (2).
2. Покажите, что если расстояние между предметом и экраном превышает $4f$, то изображение на экране может быть получено при двух различных положениях линзы. Покажите также, что если это расстояние равно $4f$, то изображение на экране может быть получено только при одном положении линзы, причём в этом случае $a_1 = a_2 = 2f$.
3. Найдите условия минимальности ошибки нахождения фокусного расстояния f тонкой положительной линзы первым и вторым способами.
4. Найдите условия минимальности ошибки нахождения фокусного расстояния f тонкой отрицательной линзы первым способом.
5. В чём причина расхождения результатов при нахождении фокусного расстояния f различными способами?